$1^{\text{ère}}$ S1

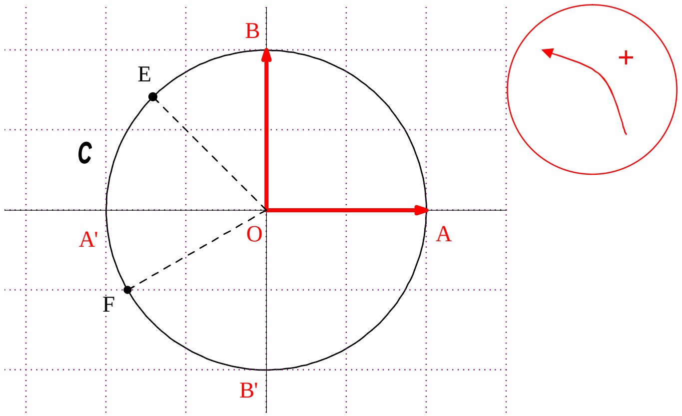
Contrôle du mardi 26 janvier 2016
(50 minutes)

Prénom : ………………………………..…… **Nom :** ……………………………..…… **Note : …. / 20**

Dans les exercices **I** et **II**, le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$. Il est demandé de ne rien écrire sur les figures.

I. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Les points E et F du cercle $\mathcal{C}$ sont associés aux réels $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{6}$. On a donc $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}\right)=\frac{3\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF}\right)=-\frac{5\pi}{6}$.



1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right)$? Justifier à l'aide d'un calcul.

…………………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………………..………………………………………………

…………………………………………………………………………..………………………………………………

2°) Quelle est l'image sur le cercle $\mathcal{C}$ du réel $\frac{1905\pi}{2}$? Répondre sans justifier.

………..

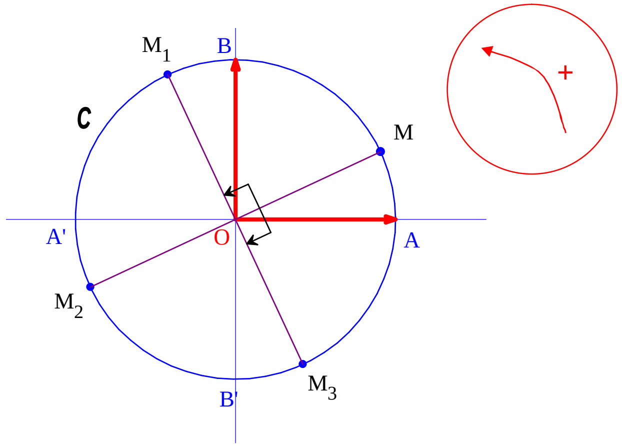
3°) Placer sur la figure le point G, image de F par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

À quel réel de l'intervalle $[-\pi;\pi]$ est associé le point G ?

………..

II. (4 points)

Soit M un point de $\mathcal{C}$ associé à un réel x.
On note M_1, M_2, M_3 du cercle $\mathcal{C}$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Quel est le point associé à $\frac{17\pi}{2}+x$?

……….

Quel est le point associé à $x-2015\pi$?

……….

Quel est le point associé à $x+\frac{47\pi}{2}$?

……….

Quel est le point associé à $x+13\pi$?

……….

III. (3 points)

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=-\dfrac{2\pi}{5}$ et $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\dfrac{3\pi}{5}$.
Compléter les égalités suivantes en donnant à chaque fois une mesure en radians (un seul résultat à chaque fois).

$\left(-3\vec{u}\,;2\vec{v}\right)=$ .... $\left(\vec{w}\,;-\vec{u}\right)=$ .... $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=$ ....

IV. (2 points)

La lettre *n* doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite des égalités à compléter.

1°) Soit $\left(u_n\right)$ une suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison – 3.
Exprimer u_n en fonction de *n*.

$u_n=$ ....

2°) Soit $\left(v_n\right)$ une suite géométrique de premier terme $v_0=3$ et de raison 2.
Exprimer v_n en fonction de *n*.

$v_n=$ ....

V. (2 points)

Les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment-ils dans cet ordre une suite arithmétique ? Justifier (on fera les calculs d'abord avant de conclure).

………

………

………

………

………

………

………

VI. (1 point)

Les nombres 2, $\dfrac{7}{3}$ et 2,666 forment-ils dans cet ordre une suite arithmétique ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

…………

VII. (2 points)

Déterminer trois entiers relatifs *x*, *y*, *z* vérifiant les conditions suivantes :
- *x*, *y*, *z* forment dans cet ordre une suite arithmétique ;
- $x<y<z$;
- $|x|+|y|+|z|=8$.

$x=$ .... $y=$ .... $z=$ ....

VIII. (1 point)

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent. En 2015, la ville comptait 40 000 habitants. On note u_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2015+n$. On a donc $u_0=40000$. On admet que la suite $\left(u_n\right)$ est définie pour tout entier naturel *n* par $u_{n+1}=0,875\times u_n+1200$.

Déterminer à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice en quelle année la ville comptera moins de 20 000 habitants.

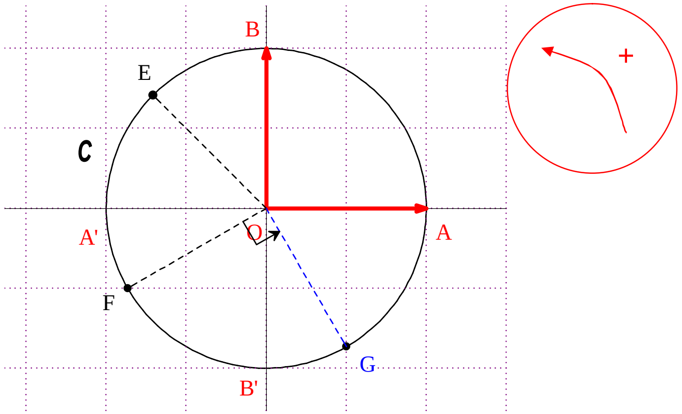
…………………. (une seule réponse, sans égalité)

Corrigé du contrôle du 26-1-2016

I.

Les points E et F du cercle $\mathcal{C}$ sont associés aux réels $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{6}$. On a donc $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right)=\frac{3\pi}{4}$ et

$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OF}\right)=-\frac{5\pi}{6}$.



1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}\right)$? Justifier à l'aide d'un calcul.

Il faut faire très attention à la présentation des calculs.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}\right)&=\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OF}\right)-\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OE}\right) \quad \text{(relation de Chasles en forme soustractive)}\\&=-\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\\&=-\frac{19\pi}{12}\end{aligned}$$

On a $-\frac{19\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}-2\pi$ donc la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OF}\right)$ est égale à $\frac{5\pi}{12}$.

On peut aussi utiliser (appliquer) directement le résultat donné dans le cours.

> Si M et N sont deux points du cercle trigonométrique associés respectivement à deux réels x et y, alors une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$ est $y-x$.

2°) Quelle est l'image sur le cercle $\mathcal{C}$ du réel $\frac{1905\pi}{2}$? Répondre sans justifier.

B

L'image désigne un point du cercle trigonométrique et non un nombre.

Pour trouver quelle est l'image de $\frac{1905\pi}{2}$, on écrit :

$$\begin{aligned}\frac{1905\pi}{2}&=\frac{1904\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\\&=952\pi+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

3°) Placer sur la figure le point G, image de F par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

À quel réel de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ est associé le point G ?

$$-\frac{\pi}{3}$$

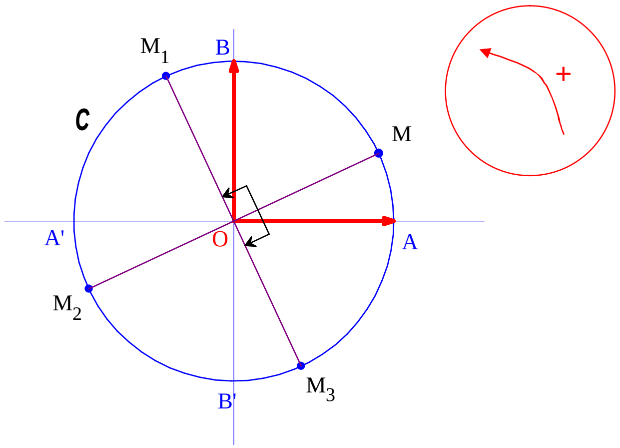
Quelques élèves ont mal placé le point G sur la figure. Attention, au sens de rotation. L'angle est $\frac{\pi}{2}$. Il s'agit d'un quart de tour direct.

On fait apparaître l'angle $\frac{\pi}{2}$ sur la figure en utilisant le codage habituel d'un angle droit orienté (codage normal + flèche à l'extrémité).

On obtient $-\frac{\pi}{3}$ par lecture graphique ou par calcul.

II.

Soit M un point de $\mathcal{C}$ associé à un réel x.
On note M_1, M_2, M_3 du cercle $\mathcal{C}$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Quel est le point associé à $\frac{17\pi}{2}+x$?

M$_1$

Quel est le point associé à $x-2015\pi$?

M$_2$

Quel est le point associé à $x+\frac{47\pi}{2}$?

M$_3$

Quel est le point associé à $x+13\pi$?

M$_2$

Pour répondre, on transforme chacun des nombres proposés.

$\frac{17\pi}{2}+x=\frac{\pi}{2}+x+8\pi$

$x-2015\pi=x+\pi-2016\pi$

$x+\frac{47\pi}{2}=x+\frac{3\pi}{2}+22\pi$

$x+13\pi=x+\pi+12\pi$

III.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=-\frac{2\pi}{5}$ et $\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)=\frac{3\pi}{5}$.
Compléter les égalités suivantes en donnant à chaque fois une mesure en radians (un seul résultat à chaque fois).

$\left(-3\vec{u}\,;2\vec{v}\right)=\frac{3\pi}{5}$ $\qquad$ $\left(\vec{w}\,;-\vec{u}\right)=\frac{4\pi}{5}$ $\qquad$ $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\frac{\pi}{5}$

$\left(-3\vec{u}\,;2\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$ (car – 3 et 2 sont de signes contraires)

$=-\frac{2\pi}{5}+\pi$

$=\frac{3\pi}{5}$

On cherche d'abord une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)$ avant de chercher une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{w}\,;-\vec{u}\right)$.

$\left(\vec{u}\,;\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\left(\vec{v}\,;\vec{w}\right)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$=-\frac{2\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}$

$=\frac{\pi}{5}$

$\left(\vec{w}\,;-\vec{u}\right)=\left(\vec{w}\,;\vec{u}\right)+\pi$

$=-\frac{\pi}{5}+\pi$

$=\frac{4\pi}{5}$

IV.

La lettre *n* doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite des égalités à compléter.

1°) Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0=5$ et de raison – 3.
Exprimer u_n en fonction de *n*.

$$u_n=5-3n$$

2°) Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0=3$ et de raison 2.
Exprimer v_n en fonction de *n*.

$$v_n=3\times 2^n$$

V.

Les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment-ils dans cet ordre une suite arithmétique ? Justifier (on fera les calculs d'abord avant de conclure).

Quelques points de méthode :

• On démarre sèchement les calculs.
• On n'introduit pas de nouvelles notations.
• On travaille en valeurs exactes (pas de valeurs approchées).
• Quelques élèves ont fait des quotients confondant suites géométriques et suites arithmétiques !

On utilise la méthode des différences (test des différences).

$2-\sqrt{2}-1=1-\sqrt{2}$

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^2-\left(2-\sqrt{2}\right)=3-2\sqrt{2}-2+\sqrt{2} \quad \text{(développement par identité remarquable)}$$
$$=1-\sqrt{2}$$

Les différences sont égales donc les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment dans cet ordre une suite arithmétique de raison $1-\sqrt{2}$.

Du point de vue de point du vocabulaire, on dit que les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment une progression arithmétique.

Extraits de solutions trouvées dans des copies :

Victor Nitot : « Les deux soustractions sont égales, donc les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment une suite arithmétique dans cet ordre et de raison $1-\sqrt{2}$ ».

Martin Lugagne : « Vérifions si les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment dans cet ordre une suite arithmétique ».

Grégoire Griffon : « On utilise la méthode de différence ».

Katell Gourlet : « Une suite arithmétique est une suite de nombre où chacun s'obtient par l'ajout d'un nombre fixe rappelé la raison ».

Barbara Fischmeister : « On retrouve le même résultat donc les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment dans cet ordre une suite arithmétique ».

Marie Dartois : « On sait qu'une suite arithmétique est une succession de nombres où il y a une même raison ayant pour valeur la différence entre un nombre et celui, le précédent ».

Guillaume Cœur : « Les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment une suite arithmétique car en considérant $u_1=1$, $u_2=2-\sqrt{2}$ et $u_3=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ et que c'est une suite arithmétique, on calcule la raison $r=u_2-u_1$ ou $r=u_3-u_2$.
Dans les deux cas ma raison obtenue est – 0,4142135… donc il s'agit bien d'une suite arithmétique. »

Héloïse de Castelnau : « Les nombres donnés forment dans cet ordre une suite arithmétique si et seulement si $2-\sqrt{2}-1=\left(1-\sqrt{2}\right)^2-\left(2-\sqrt{2}\right)$ ».

Philippine Bernard : « Les deux différences donnent le même *résultat*, donc les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ dans cette ordre forment une suite arithmétique de raison $1-\sqrt{2}$. ».

Jeanne Valcin : « On fait les différences entre les termes tel que … » calculs …
« Les résultats sont les mêmes donc la raison est $1-\sqrt{2}$ et il s'agit d'une suite arithmétique »

Marine Thépaut : … calculs …
« Ces deux soustractions donnent le même résultat donc les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment dans cet ordre une suite arithmétique de raison $1-\sqrt{2}$ ».

Diane Schneider : « La *soustraction* des termes qui se suivent avec le précédent donne $1-\sqrt{2}$. La raison est donc $1-\sqrt{2}$ est commune. Les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment dans cet ordre une suite arithmétique de raison $1-\sqrt{2}$. »

Mathilde Santus : « On remarque que les différences sont *identiques*. Les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment une suite arithmétique dans cet ordre de raison $1-\sqrt{2}$. »

Gaëlle Saint-Supéry : « On obtient les mêmes *résultats*. Ces nombres forment donc une suite arithmétique »

Nicolas Paris : « On calcule les différences respectives entre les différents nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$.On remarque que les *résultats* des différences sont les *mêmes*. Donc dans cet ordre les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment une suite arithmétique ».

Louis Méraud : « Donc les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ forment dans cet ordre une suite arithmétique de raison $1-\sqrt{2}$. »

Jean Louette : « La raison des deux calculs sont différents donc ces nombres ne forment pas une suite arithmétique dans cet ordre. »

Raphaël de Malherbe : « Ces résultats sont les *mêmes* donc ces nombres forment bien une suite arithmétique dans cet ordre. »

Valentine de Gaulle : « On *soustrait* à chaque terme (sauf le premier) le terme précédent. … On obtient le *résultat* $1-\sqrt{2}$. »

Lucile Catrou : « Les soustractions indépendantes de chaque terme avec celui qui le précède sont égales donc 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ est une suite arithmétique dans cet ordre. »

Paul-Émile Aldebert : « On constate, grâce à la règle de la différence, que les nombres 1, $2-\sqrt{2}$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ sont une même raison $1-\sqrt{2}$. Ils forment donc dans cet ordre une suite arithmétique de raison $1-\sqrt{2}$. »

VI.

Les nombres 2, $\dfrac{7}{3}$ et 2,666 forment-ils dans cet ordre une suite arithmétique ?
Répondre par oui ou non sans justifier.

non

VII.

Déterminer trois entiers relatifs x, y, z vérifiant les conditions suivantes :
• x, y, z forment dans cet ordre une suite arithmétique ;
• $x < y < z$;
• $|x| + |y| + |z| = 8$.
Il fallait bien voir la valeur absolue.

Il y avait trois possibilités de réponses :

$x = -4$ $\quad y = 0$ $\quad z = 4$

ou

$x = -1$ $\quad y = 2$ $\quad z = 5$

ou

$x = -5$ $\quad y = -2$ $\quad z = 1$

Il n'y a pas de méthode spéciale pour résoudre ce type de question. Il s'agit d'un exercice de type « recherche » qui n'utilise pas de formule.

Comme x, y, z sont des entiers relatifs, $|x|$, $|y|$, $|z|$ sont des entiers naturels.
On cherche donc d'abord comment écrire 8 comme somme de trois entiers naturels. Cela fournit les valeurs absolues de x, y, z.
Ensuite, on cherche un peu sachant que x, y, z forment dans cet ordre une suite arithmétique. Il n'y a pas moyen de trouver x, y, z par résolution d'équations.

Une autre méthode consisterait à utiliser un algorithme (avec boucles « Pour ») puis à le programmer sur calculatrice. On obtiendrait ainsi toutes les solutions.

VIII.

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent. En 2015, la ville comptait 40 000 habitants. On note u_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2015+n$. On a donc $u_0 = 40000$. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,875 \times u_n + 1200$.

Déterminer à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice en quelle année la ville comptera moins de 20 000 habitants.

2024 (une seule réponse, sans égalité)

Il s'agit de la détermination d'une valeur seuil.

On utilise la relation de récurrence donnée dans l'énoncé.

● On rentre le nombre 40000.

● On appuie sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

● On fait $\text{Rep} * 0.875 + 1200$.

● On appuie 9 fois sur la touche $\boxed{\text{entrer}}$.

Le lundi 1-2-2016

Pour déterminer tous les couples, on peut utiliser la courbe d'équation $|x+y| + |y| + |x-y| = 8$ (courbe à tracer sur XCas).
Quand $x = 0$, on obtient $|y| = \dfrac{8}{3}$.