

La conjecture de Sierpiński

Wacław Sierpiński, mathématicien polonais (1882-1969), a émis une conjecture (propriété non démontrée) qui dit que :

« Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on peut trouver trois entiers naturels x, y, z non nuls tels que $\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ».

Par exemple, pour $n = 2$, il a proposé : $x = 1$; $y = 1$ et $z = 2$.

Vérifions sa solution :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$$

L'égalité $\frac{5}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$ montre que la propriété est vraie pour $n = 2$.

1°) Pour $n = 4$, il a proposé : $x = 1$; $y = 8$; $z = 8$ ou $x = 1$; $y = 2$; $z = 4$.

Vérifier ces deux solutions.

2°) Vérifier la conjecture de Sierpiński pour toutes les valeurs entières de n entre 5 et 10.

Pour chacune de ces valeurs, trouver une ou plusieurs solutions. Présenter les réponses dans un tableau (voir ci-dessous). On ne demande pas le détail des calculs.

n	x	y	z
2	1	1	2
4			
4			
5			