TS2 spécialité

Contrôle du mercredi 25 novembre 2015 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : ……………………………… Nom : ……………………………………………….

I. (5 points)

Soit n un entier naturel quelconque.
Démontrer que le nombre $2^{3n}-2^{3n+2}+3$ est divisible par 7.

II. (5 points)

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est donnée par $\mathrm{N}=\overline{aba2}$ où a et b sont des entiers naturels tels que $1\leqslant a\leqslant 9$ et $0\leqslant b\leqslant 9$.
Déterminer toutes les écritures possibles de N sachant que N est divisible par 4 et par 9.

……………………………………………………….. (répondre sans écrire d'égalités et sans faire de phrases)

III. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) a) 2 points ; b) 2 points)

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) Démontrer que le nombre $\mathrm{A}=2013^3+2014^3$ est divisible par 7 en utilisant les congruences.
Rédiger de la manière la plus concise possible.

2°)

a) Compléter le tableau de congruences suivant par des entiers naturels les plus petits possible.

$x \equiv \ldots \ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^3 \equiv \ldots \ [7]$							
$(x+1)^3 \equiv \ldots \ [7]$							
$x^3+(x+1)^3 \equiv \ldots \ [7]$							

b) En déduire l'ensemble *E* des entiers relatifs *x* tels que $x^3+(x+1)^3$ soit divisible par 7.
Rédiger une phrase de réponse selon le modèle suivant, à recopier et à compléter :
« L'ensemble *E* est l'ensemble des entiers relatifs …….. ».

………

………

………

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=3$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=(u_n)^2+u_n+1$.
On admettra que tous les termes de la suite sont des entiers naturels.

1°) Calculer les premiers termes de la suite au brouillon ou à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conjecturer sur le dernier chiffre de l'écriture décimale des termes de la suite ? Répondre par une phrase.

………

………

2°) Proposer une manière de démontrer ce résultat. On ne demande pas de faire la démonstration.

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 25-11-2015

I.

Soit n un entier naturel quelconque.
Démontrer que le nombre $2^{3n}-2^{3n+2}+3$ est divisible par 7.

1^ère^ méthode :

$2^3=8$
Or $8\equiv1$ (mod. 7) donc $2^3\equiv1$ (mod. 7).

D'où $2^{3n}\equiv1$ (mod. 7).

Par suite, $-2^{3n}\equiv-1$ (mod. 7) d'où $-2^{3n+2}\equiv-4$ (mod. 7).

On a alors $2^{3n}-2^{3n+2}+3\equiv1-4+3$ (mod. 7) soit $2^{3n}-2^{3n+2}+3\equiv0$ (mod. 7).

Par suite, $2^{3n}-2^{3n+2}+3$ est divisible par 7.

2^e^ méthode :

On commence par transformer l'expression $2^{3n}-2^{3n+2}+3$ de manière à la réduire.

$$\begin{aligned}2^{3n}-2^{3n+2}+3&=\left(2^3\right)^n-\left(2^3\right)^n\times2^2+3\\&=8^n-8^n\times2^2+3\\&=8^n\times(1-4)+3\\&=-3\times8^n+3\\&=3\times\left(1-8^n\right)\end{aligned}$$

$8\equiv1$ (mod. 7) donc $8^n\equiv1$ (mod. 7).

D'où $1-8^n\equiv0$ (mod. 7).

On en déduit que $1-8^n$ est divisible par 7 et par suite $3\times\left(1-8^n\right)$ est aussi divisible par 7.

II.

Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est donnée par $N=\overline{aba2}$ où a et b sont des entiers naturels tels que $1\leqslant a\leqslant9$ et $0\leqslant b\leqslant9$.
Déterminer toutes les écritures possibles de N sachant que N est divisible par 4 et par 9.

1512 ; 3132 ; 5652 ; 7272 ; 9792 (répondre sans écrire d'égalités et sans faire de phrases)

On utilise les critères de divisibilité par 4 et par 9.

● Divisibilité par 4 :

N est divisible par 4 si et seulement si $\overline{a2}$ est divisible par 4.

On rappelle que $1\leqslant a\leqslant9$.

Les valeurs possibles de a sont 1, 3, 5, 7, 9.

● Divisibilité par 9 :

$a+b+a+2$ divisible par 9 c'est-à-dire $9\mid 2a+b+2$.

Pour $a=1$, $9\mid 4+b$ soit $b=5$.

Pour $a=3$, $9\mid 8+b$ soit $b=1$.

Pour $a=5$, $9\mid 12+b$ soit $b=6$.

Pour $a=7$, $9\mid 16+b$ soit $b=2$.

Pour $a=7$, $9\mid 20+b$ soit $b=7$.

Autre méthode :

On utilise les congruences modulo 4 et modulo 9.

On cherche a et b tels que : $\begin{cases}N\equiv0 & (\text{mod}.\,4)\\ N\equiv0 & (\text{mod}.\,9)\end{cases}$ soit $\begin{cases}a\times10^3+b\times10^2+a\times10^1+2\equiv0 & (\text{mod}.\,4)\\ a\times10^3+b\times10^2+a\times10^1+2\equiv0 & (\text{mod}.\,9)\end{cases}$.

On doit avoir $\begin{cases}a+2\equiv0 & (\text{mod}.\,4)\\ a+b+a+2\equiv0 & (\text{mod}.\,9)\end{cases}$ soit $\begin{cases}a\equiv & (\text{mod}.\,4)\\ 2a+b\equiv-2 & (\text{mod}.\,9)\end{cases}$.

III.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) Démontrer que le nombre $\text{A} = 2013^3 + 2014^3$ est divisible par 7 en utilisant les congruences.
Rédiger de la manière la plus concise possible.

On a : $2013 = 287 \times 7 + 4$ donc $2013 \equiv 4$ (mod. 7).

De même, $2014 = 288 \times 7 - 2$ donc $2014 \equiv -2$ (mod. 7).

On élève les deux membres de la congruence au cube.

$2013^3 \equiv 64$ (mod. 7) et $2014^3 \equiv -8$ (mod. 7) donc $\text{A} \equiv 56$ (mod. 7).

Or $56 \equiv 0$ (mod. 7) donc A est divisible par 7.

Variante (Guillaume Sevalle) :

On a : $2013 = 287 \times 7 + 4$ donc $2013 \equiv 4$ (mod. 7).
Par suite, $2013^3 \equiv 1$ (mod. 7)

On a : $2014 = 287 \times 7 + 5$ donc $2014 \equiv 5$ (mod. 7).
Par suite, $2014^3 \equiv 125$ (mod. 7)
De plus, $125 \equiv -1$ (mod. 7)
D'où $\text{A} \equiv 0$ (mod. 7).

On en déduit que A est divisible par 7.

2°)

a) Compléter le tableau de congruences suivant par des entiers naturels les plus petits possible.

$x \equiv \ldots\ [7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^3 \equiv \ldots\ [7]$	0	1	1	6	1	6	6
$(x+1)^3 \equiv \ldots\ [7]$	1	1	6	1	6	6	0
$x^3 + (x+1)^3 \equiv \ldots\ [7]$	1	2	0	0	0	5	6

b) En déduire l'ensemble *E* des entiers relatifs *x* tels que $x^3 + (x+1)^3$ soit divisible par 7.
Rédiger une phrase de réponse selon le modèle suivant, à recopier et à compléter :
« L'ensemble *E* est l'ensemble des entiers relatifs …….. ».

1ère manière de répondre :

L'ensemble *E* est l'ensemble des entiers relatifs dont le reste de la division euclidienne par 7 vaut 2, 3 ou 4.

2e manière de répondre :

L'ensemble *E* est l'ensemble des entiers relatifs congrus à 2, 3 ou 4.

3e manière de répondre :

L'ensemble *E* est l'ensemble des entiers relatifs de la forme $2+7k$, $3+7k$, $4+7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n + 1$.
On admettra que tous les termes de la suite sont des entiers naturels.

1°) Calculer les premiers termes de la suite au brouillon ou à l'aide de la calculatrice. Que peut-on conjecturer sur le dernier chiffre de l'écriture décimale des termes de la suite ? Répondre par une phrase.

Avec la calculatrice, on trouve : $u_0 = 3$, $u_1 = 13$, $u_2 = 183$, $u_3 = 33673$.
Il semble que le dernier chiffre de l'écriture décimale des termes de la suite soit toujours égal à 3.

2°) Proposer une manière de démontrer ce résultat. On ne demande pas de faire la démonstration.

On peut effectuer un raisonnement par récurrence en utilisant la phrase $P(n)$: « $u_n \equiv 3$ (mod. 10) ».

La phrase $P(0)$ est vraie.

On démontre que si la phrase $P(k)$ est vraie (*k* étant un entier naturel), alors la phrase $P(k+1)$ est également vraie.

Fin du corrigé du contrôle

Source I : contrôle sur les congruences de Mme Derycke