TS1

Contrôle du samedi 16 janvier 2016 (2 heures)

Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé. Une feuille de réponses est jointe au sujet.

L'énoncé est à rendre dans la copie.

Un certain nombre d'exercices nécessitent une recherche préalable au brouillon.

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Une urne contient 6 boules blanches et n boules noires (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2).
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
Pour chaque boule blanche tirée, on gagne 2 euros et pour chaque boule noire tirée, on perd 3 euros.
On note X la variable aléatoire qui à chaque issue associe le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Faire un arbre de probabilités au brouillon pour modéliser l'expérience aléatoire.
Déterminer la loi de probabilité de X. On dressera directement le tableau sans détailler les calculs.
Les probabilités seront données en fonction de n.

2°) Démontrer que l'espérance mathématique de X est donnée par $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 6 \times \dfrac{4-n}{n+6}$.
On détaillera le calcul en 4 lignes seulement ; on montrera bien comment on obtient le résultat final.

3°) Préciser la valeur de n pour laquelle le jeu est équitable et calculer la variance de X dans ce cas (valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible). On écrira la formule utilisée et l'on donnera seulement 2-3 étapes de calcul.

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.
• 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
• 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ». Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle [0 ; 1].
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ». On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.

Aucune justification n'est demandée.

1°) Déterminer la valeur exacte de x.

2°) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

3°) Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues. On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au hasard avec remise.
Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ».
On arrondira le résultat au millième.

4°) Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

Déterminer à l'aide de la loi binomiale l'intervalle de fluctuation de la fréquence de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.

Que peut-on penser de l'affirmation du fournisseur ?

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit λ un nombre complexe non nul fixé.
Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $f(z) = 1 + \dfrac{\lambda}{z}$.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe $-\overline{\lambda}$.

1°) Soit z un nombre complexe non nul. On note M le point de P d'affixe z.
Exprimer $|f(z)|$ en fonction des distances MO et de MA. Expliquer brièvement en 2-3 lignes.

2°) Déterminer l'ensemble E des points M du plan P, d'affixe z, tels que $|f(z)| = 1$.
On rédigera de manière très précise.

IV. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(x)$ (on donnera seulement deux étapes de calcul).
Déterminer en justifiant avec précision $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis donner sans justifier $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de f avec les limites et les extremums éventuels.

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{E}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel a, $\mathrm{E}(a)$ désigne la partie entière de a.

a) Déterminer l'expression de g suivant les valeurs de x.

b) Tracer au verso la représentation graphique G de g dans le repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit A et B deux points distincts du plan. On considère un point mobile qui se déplace sur le segment $[AB]$ en partant de A.
Il va d'abord de A vers B.
Il s'arrête en B, fait demi-tour puis va jusqu'au milieu I de $[AB]$.
Il s'arrête en I, fait demi-tour puis va jusqu'au milieu J de $[IB]$.
Il continue ainsi de suite, en repartant à chaque fois dans le sens contraire et en décrivant un trajet de longueur la moitié du chemin précédent.
On appelle étape 1 le trajet de A vers B, étape 2 le trajet de B vers I, étape 3 le trajet de I vers J etc.
On pose $AB = a$ $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.

1°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note L_n la distance totale parcourue au bout de *n* étapes.

Déterminer une expression simplifiée de L_n en fonction de *n* et de *a*.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$ (en justifiant soigneusement).

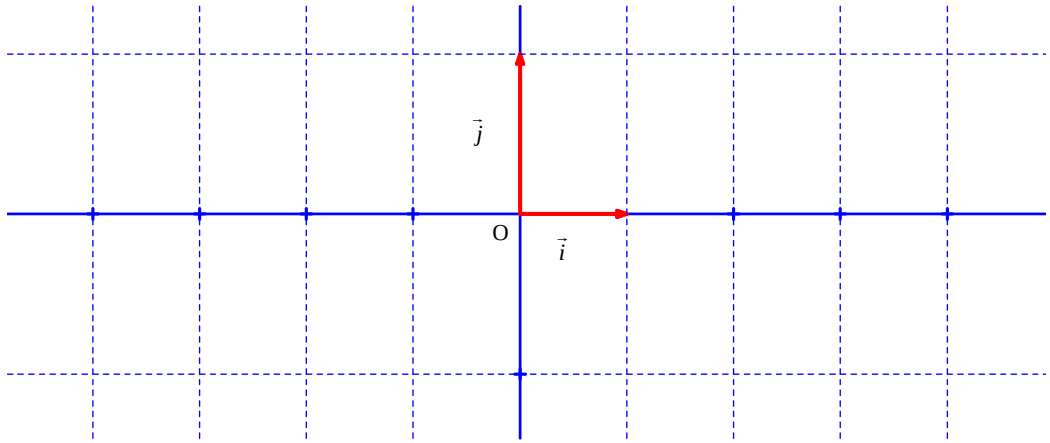
2°) On munit la droite (AB) du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note x_n l'abscisse du point mobile lorsqu'il s'arrête au bout de *n* étapes. Ainsi, on a $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Déterminer une expression simplifiée de x_n en fonction de *n*.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Interpréter géométriquement cette limite.

Prénom et nom : ……..……

IV. 2°) b) 1 point



Prénom et nom : ……..……

Note : ……../ 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°)

2°)

……

……

……

……

……

……

3°)

……

……

……

……

……

……

……

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

1°) $x =$ ..... 2°) …… (un seul résultat sans égalité) 3°) ……

4°) …….… (écrire l'intervalle de fluctuation sans égalité)

……

……

……

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

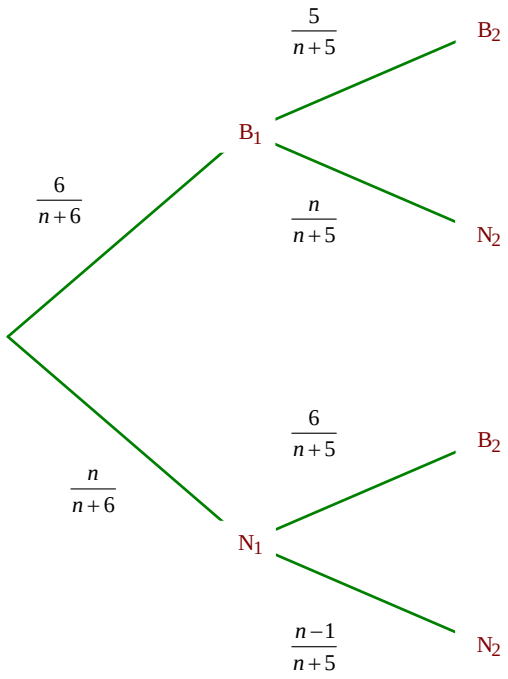
Corrigé du contrôle du 16-1-2016

I.

1°) On définit les événements suivants :

B_1 : « la boule obtenue au premier tirage est blanche » ;
N_1 : « la boule obtenue au premier tirage est noire » ;
B_2 : « la boule obtenue au deuxième tirage est blanche » ;
N_2 : « la boule obtenue au deuxième tirage est noire ».

$$P(B_1)=\frac{6}{n+6}$$
$$P(N_1)=\frac{n}{n+6}$$
$$P(B_2/B_1)=\frac{5}{n+5}$$
$$P(N_2/B_1)=\frac{n}{n+5}$$
$$P(B_2/N_1)=\frac{6}{n+5}$$
$$P(N_2/N_1)=\frac{n-1}{n+5}$$



Les valeurs possibles de X sont $x_1=-6,\ x_2=-1,\ x_3=4$.

$$P(X=-6)=P(N_1\cap N_2)$$
$$=P(N_1)\times P(N_2/N_1)$$
$$=\frac{n}{n+6}\times\frac{n-1}{n+5}$$
$$=\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}$$ (on ne développe pas le numérateur ni le dénominateur)

$$P(X=-1)=P(B_1\cap N_2)+P(N_1\cap B_2)$$
$$=P(B_1)\times P(N_2/B_1)+P(N_1)\times P(B_2/N_1)$$
$$=\frac{6}{n+6}\times\frac{n}{n+5}+\frac{n}{n+5}\times\frac{6}{n+6}$$
$$=\frac{12n}{(n+5)(n+6)}$$

$$P(X=4)=P(B_1\cap B_2)$$
$$=\frac{30}{(n+5)(n+6)}$$

x_i	-6	-1	4	
$P(X=x_i)$	$\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}$	$\frac{12n}{(n+5)(n+6)}$	$\frac{30}{(n+5)(n+6)}$	Total $=1$

/!\ Ne pas développer les dénominateurs dans les probabilités.

2°)

$$E(X)=-6\times\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}-1\times\frac{12n}{(n+5)(n+6)}+4\times\frac{30}{(n+5)(n+6)}$$
$$=-\frac{6n(n-1)}{(n+5)(n+6)}-\frac{12n}{(n+5)(n+6)}+\frac{30}{(n+5)(n+6)}$$
$$=\frac{-6n^2-6n+120}{(n+5)(n+6)}$$
$$=-\frac{6(n^2+n-20)}{(n+5)(n+6)}$$

Considérons le polynôme x^2+x-20 avec $x\in\mathbb{R}$.
Les racines de ce polynôme sont -5 et 4.
On peut alors écrire la factorisation suivante : $\forall x\in\mathbb{R}\quad x^2+x-20=(x+5)(x-4)$.

On peut donc achever le calcul de $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{X}) &= -\frac{6(n+5)(n-4)}{(n+5)(n+6)}\\ &= -6\times\frac{n-4}{n+6}\end{aligned}$$

On obtient : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 6\times\frac{4-n}{n+6}$.

3°)

Le jeu est équitable si et seulement si $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0$

si et seulement si $6\times\frac{4-n}{n+6} = 0$

si et seulement si $4-n=0 \quad (n+6\neq 0)$

si et seulement si $n=4$

Dans ce cas, la loi de probabilité de X est donnée par :

x_i	-6	-1	4	
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{4\times(4-1)}{(4+5)\times(4+6)} = \frac{2}{15}$	$\frac{12\times 4}{(4+5)\times(4+6)} = \frac{8}{15}$	$\frac{30}{(4+5)\times(4+6)} = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$	Total $=1$

Pour le calcul de la variance, on sait que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0$ puisque l'on déterminé la valeur de *n* pour laquelle le jeu est équitable.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= 36\times\frac{2}{15}+1\times\frac{8}{15}+16\times\frac{5}{15}-0^2 \quad \text{(formule de Koenig-Huygens)}\\ &= \frac{160}{15}\\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

Question supplémentaire : Calculons la variance de X en fonction de *n*.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= 36\times\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}+1\times\frac{12n}{(n+5)(n+6)}+16\times\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+6)}-36\times\left(\frac{n-4}{n+6}\right)^2\\ &= \frac{12}{(n+5)(n+6)}\left[3n(n-1)+n+40\right]-36\times\frac{(n-4)^2}{(n+6)^2}\\ &= \frac{12(3n^2-2n+40)}{(n+5)(n+6)}-36\times\frac{(n-4)^2}{(n+6)^2}\\ &= \frac{12}{n+6}\left[\frac{3n^2-2n+40}{n+5}-3\frac{(n-4)^2}{n+6}\right]\\ &= \frac{12}{(n+5)(n+6)^2}\left[(3n^2-2n+40)(n+6)-3(n+5)(n-4)^2\right]\\ &= \frac{12\times(25n^2+100n)}{(n+5)(n+6)^2}\\ &= \frac{12\times 25n(n+4)}{(n+5)(n+6)^2}\\ &= \frac{300n(n+4)}{(n+5)(n+6)^2}\end{aligned}$$

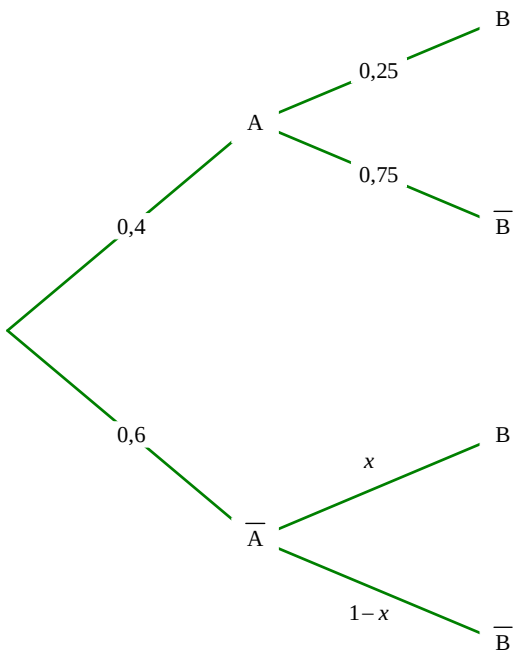
Pour $n=4$, on retrouve la valeur de la variance calculée précédemment.

II.

1°) On représente cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :

A : « la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange » ;

B : « la bouteille prélevée est une bouteille de "pur jus" ».



D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{B}) &= P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}) \\ &= P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})\times \mathrm{P}(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}}) \\ &= 0,4\times 0,25 + 0,6\times x \\ &= 0,1 + 0,6x \end{aligned}$$

On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(\mathrm{B}) = 0,2$.

Par suite, $0,1+0,6x = 0,2$. On en déduit que $x = \frac{1}{6}$.

2°)

$$\begin{aligned} P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) &= \frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} \\ &= \frac{0,1}{0,2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

3°) On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500 ; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à $p = 0,2$ ou elle ne l'est pas avec la probabilité. On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,2$.

On cherche $P(\mathrm{X} \geqslant 75)$ qui est égal à $1 - P(\mathrm{X} \leqslant 74)$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $P(\mathrm{X} \geqslant 75) = 0,998373039...$.

Par conséquent, on a : $P(\mathrm{X} \geqslant 75) \approx 0,998$ (valeur arrondie au millième).

4°) On utilise la loi binomiale de paramètres $n = 900$ et $p = 0,9$.
Avec les notations usuelles, on obtient $a = 792$ et $b = 827$.

L'intervalle de fluctuation de la fréquence de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 % est $\left[\frac{792}{900} ; \frac{827}{900}\right]$.

Il ne faut pas se fatiguer à simplifier les bornes. Ça n'a aucun intérêt pour le test.

Dans l'échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe. La fréquence de bouteilles présentant moins de 2 % de pulpe dans l'échantillon est donc $f = \frac{766}{900}$.

On constate que $f \notin \left[\frac{792}{900} ; \frac{827}{900}\right]$ donc on peut penser que l'affirmation du fournisseur est fausse.

III.

1°)

$$\left| f(z) \right| = \left| 1 + \frac{\lambda}{\bar{z}} \right|$$

$$= \left| \frac{\bar{z} + \lambda}{\bar{z}} \right|$$

$$= \frac{\left| \bar{z} + \lambda \right|}{\left| \bar{z} \right|}$$

$$= \frac{\left| \overline{\bar{z} + \lambda} \right|}{\left| z \right|}$$

$$= \frac{\left| z + \bar{\lambda} \right|}{\left| z \right|}$$

$$= \frac{\left| z - \left(-\bar{\lambda} \right) \right|}{\left| z \right|}$$

$$= \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OM}}$$

$$= \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MO}}$$

2°)

Soit M un point quelconque de P d'affixe z.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \left| f(z) \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MO}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MO} \end{aligned}$$

L'ensemble E est la médiatrice de $[\mathrm{OA}]$.

IV.

1°) f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) &= \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x \times 2x}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{2(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de 2		+		+		+	
Signe de $1+x$		−	0	+		+	
Signe de $1-x$		+		+	0	−	
Signe de $\left(1+x^2\right)^2$		+		+		+	
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	
Variations de f	0	↘	-1	↗	1	↘	0

f est une fonction rationnelle non nulle donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

On ne donne aucune interprétation graphique de cette limite (car ce n'est pas demandé dans l'énoncé).

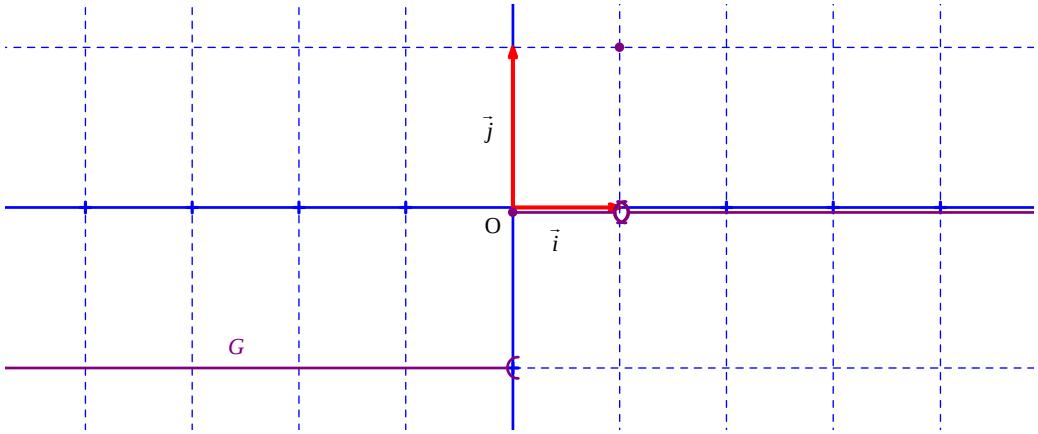
De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2°) $g : x \mapsto \mathrm{E}\left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$

a) On constate que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \mathrm{E}\left(f(x) \right)$.

- Si $x \in \left]-\infty\,;0\right[$, alors $-1 \leqslant f(x) < 0$ et par suite, $g(x) = -1$.
- Si $x \in [0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$, alors $0 \leqslant f(x) < 1$ et par suite, $g(x) = 0$.
- Si $x = 1$, alors $f(x) = 1$ et par suite, $g(1) = 1$.

b)



On ne peut pas vérifier la représentation graphique *G* sur la calculatrice (la calculatrice n'est pas précise).

V.

Il s'agit d'un problème de modélisation d'une suite « concrète » par une suite ».

1°) On commence par exprimer L_n comme une somme.

$$L_n = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \ldots + \frac{a}{2^{n-1}} \quad \text{(somme de } n \text{ termes)}$$

$$= a \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \quad \text{(on reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)}$$

$$= 2a \times \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

On peut aussi utiliser le symbole Σ pour écrire L_n. On peut aussi écrire $L_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a}{2^k}$.

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$. Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} L_n = 2a$.

Autre méthode :

On note u_n la longueur du trajet parcourue à l'étape *n*.

On a $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$.

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $u_1 = a$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad L_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$$

$$= a \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

2°) On commence par exprimer x_n comme une somme.

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$. Par conséquent, $\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

Lorsque *n* tend vers l'infini, le point mobile tend vers le point G de la droite (AB) d'abscisse $\frac{2}{3}$ dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$.