1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 12 janvier 2016 (30 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : …. / 20

I. (9 points)

Partie 1 (1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + 12 + \dfrac{450}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Calculer $f'(x)$. Le résultat sera présenté sous la forme d'un seul quotient avec numérateur factorisé.

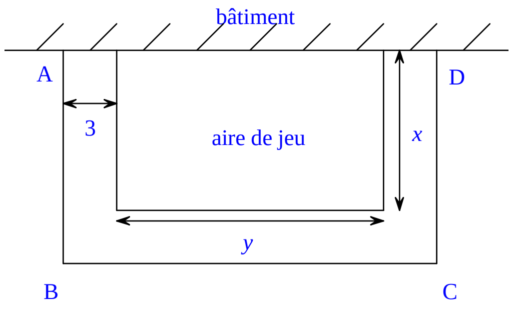
$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) =$ ………………………………………… (un seul résultat)

2°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

Partie 2 (1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m^2.

Cet espace de jeu est entouré sur les trois côtés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le schéma ci-dessous (il est demandé de ne rien écrire dessus).



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés [AB], [BC] et [CD]. On s'intéresse à la longueur L de la clôture en mètres : $L = AB + BC + CD$. On note *x* et *y* les dimensions en mètres de l'aire de jeu.

1°) Exprimer la longueur L en fonction de *x*.

On attend une rédaction précise et soignée.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Déduire de la partie 1 les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur ?

………

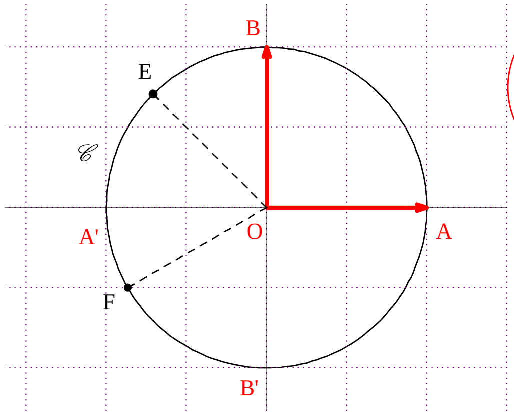
………

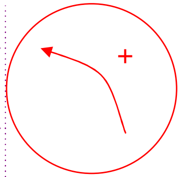
………

………

II. (6 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$. Les points E et F sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ comme l'indique la figure ci-dessous.





1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}\right)$? de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF}\right)$?

Répondre sans justifier et représenter ces mesures sur la figure.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}\right)$ est égale à ……………. .

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF}\right)$ est égale à ……………. .

2°) On note G l'image de $\dfrac{2999\pi}{3}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OG}\right)$? Répondre sans justifier ; placer le point G sur la figure et représenter la mesure principale.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OG}\right)$ est égale à ……………. .

3°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0;2\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{EF}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

…………………………………..

4°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{EG}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

…………………………………..

III. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012. À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70 % de son effectif pour l'année suivante. Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1°) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.

Le nombre d'élèves en 2013 est égal à ……………………… (un seul résultat, sans égalité).

Le nombre d'élèves en 2014 est égal à ……………………… (un seul résultat, sans égalité).

2°) En utilisant la commande « rép » de la calculatrice, calculer le nombre d'élèves que l'on peut prévoir en 2020. On arrondira le résultat à l'unité.

……………………………… (un seul résultat, sans égalité)

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$.

On choisit un nombre de départ supérieur ou égal à $-\dfrac{1}{2}$. On calcule l'image de ce nombre par f. On obtient un résultat.

On recommence avec le nouveau nombre. On calcule son image par f. On obtient un résultat.

Et on recommence selon le même procédé indéfiniment.

On obtient ainsi une suite infinie de nombres dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction f.

On note u_1 le nombre de départ, u_2 le deuxième nombre, u_3 le troisième nombre etc.…

1°) On prend $u_1 = 1000$.

Déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de u_6 à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice.

……………………… (un seul résultat, sans égalité)

2°) Soit n un entier naturel quelconque. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

…………………………………..…… (une seule égalité)

Corrigé du contrôle du 12-1-2016

I.

Partie 1

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x + 12 + \dfrac{450}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) Calculer $f'(x)$. Le résultat sera présenté sous la forme d'un seul quotient avec numérateur factorisé.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{2(x-15)(x+15)}{x^2} \quad \text{ou} \quad f'(x) = \frac{2(x^2-225)}{x^2}$$

2°) Faire un tableau comprenant l'étude précise du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

On peut écrire $x^2 - 225$ sous la forme $(x-15)(x+15)$ ce qui permet d'écrire $f'(x) = \dfrac{2(x-15)(x+15)}{x^2}$.

Le numérateur est écrit sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré (sauf 2 qui est de degré 0).

Les valeurs qui annulent $f'(x)$ sont – 15 et 15 (0 est valeur impossible).

$x^2 - 225$ est polynôme du second degré dont les racines sont – 15 et 15.
Il est donc du signe du coefficient de x^2, c'est-à-dire positif, pour *x* en dehors de l'intervalle des racines, et négatif pour x compris entre les racines.

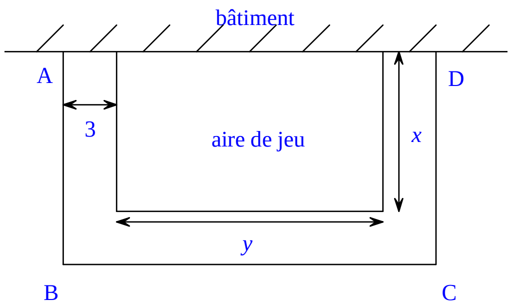
x	$-\infty$		-15		0		15		$+\infty$
Signe de $x^2 - 225$		+	0^{num}	–		–	0^{num}	+	
Signe de x^2		+		+	$0^{\text{dén}}$	+		+	
Signe de $f'(x)$		+	0^{num}	–	‖	–	0^{num}	+	
Variations de f		↗	-48	↘	‖	↘	72	↗	

On vérifie les variations sur la calculatrice en traçant la courbe représentative de *f*.

Partie 2

On veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire de 450 m^2.

Cet espace de jeu est entouré sur les trois côtés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le schéma ci-dessous (il est demandé de ne rien écrire dessus).



L'ensemble est clôturé sur les trois côtés [AB], [BC] et [CD]. On s'intéresse à la longueur L de la clôture en mètres : $\text{L} = \text{AB} + \text{BC} + \text{CD}$. On note *x* et *y* les dimensions en mètres de l'aire de jeu.

1°) Exprimer la longueur L en fonction de *x*.

On attend une rédaction précise et soignée.

On a $\text{AB} = \text{CD} = x + 3$ et $\text{BC} = y + 6$.

Donc :

$$\begin{aligned} \text{L} &= 2(x+3) + y + 6 \\ &= 2x + 6 + y + 6 \\ &= 2x + y + 12 \end{aligned}$$

Or l'aire de jeu a pour superficie 450 m^2.

Donc $xy = 450$ d'où $y = \dfrac{450}{x}$.

On en déduit que $\text{L} = 2x + \dfrac{450}{x} + 12$.

2°) Déduire de la partie 1 les dimensions à donner à l'aire de jeu pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible. Quelle est alors cette longueur ?

On constate que $\text{L} = f(x)$.

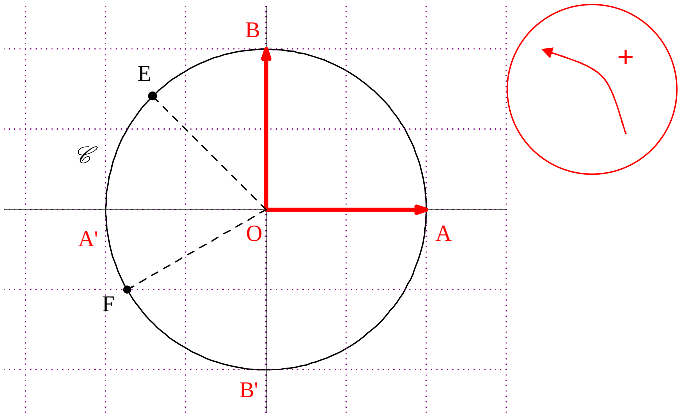
Comme $x > 0$ puisque *x* est une longueur, on s'intéresse à la restriction de *f* à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

D'après le tableau de variations, le minimum de *f* sur $]0\,;+\infty[$ est égal à 72 et est atteint pour $x = 15$.

Pour que la longueur de la clôture soit la plus petite possible, l'aire de jeu doit avoir pour dimensions $x = 15$ et $y = \dfrac{450}{15} = 30$ (ces deux dimensions étant exprimées en mètres). La clôture a alors pour longueur 72 m.

II.

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique et on considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$. Les points E et F sont deux points du cercle $\mathscr{C}$ comme l'indique la figure ci-dessous.



1°) Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})$? de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF})$?

Répondre sans justifier et représenter ces mesures sur la figure.

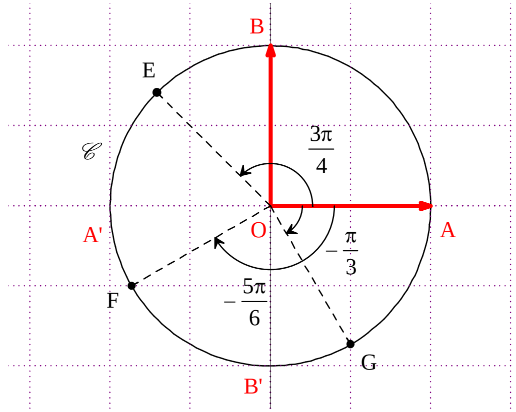
La mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})$ est égale à $\frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF})$ est égale à $-\frac{5\pi}{6}$.

2°) On note G l'image de $\frac{2999\pi}{3}$ sur le cercle $\mathscr{C}$.

Quelle est la mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OG})$? Répondre sans justifier ; placer le point G sur la figure et représenter la mesure principale.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OG})$ est égale à $-\frac{\pi}{3}$.



3°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[0;2\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{EF}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

$$\left[\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{6}\right]$$

On commence à partir de A.

4°) Quel est l'ensemble des réels x de l'intervalle $[-\pi;\pi]$ dont l'image M appartient à l'arc $\overset{\frown}{EG}$ (extrémités comprises) ? Répondre sans justifier, ni faire de phrase.

$$\left[-\pi;-\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$$

/!\ Ne pas confondre angle et arc.

III.

On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012. À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70 % de son effectif pour l'année suivante. Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1°) Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.

Le nombre d'élèves en 2013 est égal à 730 (un seul résultat, sans égalité).

Le nombre d'élèves en 2014 est égal à 751 (un seul résultat, sans égalité).

2°) En utilisant la commande « rép » de la calculatrice, calculer le nombre d'élèves que l'on peut prévoir en 2020. On arrondira le résultat à l'unité.

794 (un seul résultat, sans égalité)

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$.

On choisit un nombre de départ supérieur ou égal à $-\dfrac{1}{2}$. On calcule l'image de ce nombre par *f*. On obtient un résultat.
On recommence avec le nouveau nombre. On calcule son image par *f*. On obtient un résultat.
Et on recommence selon le même procédé indéfiniment.
On obtient ainsi une suite infinie de nombres dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction *f*.

On note u_1 le nombre de départ, u_2 le deuxième nombre, u_3 le troisième nombre etc.…

1°) On prend $u_1 = 1000$.
Déterminer la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de u_6 à l'aide de la commande « rép » de la calculatrice.

2,703 (un seul résultat, sans égalité)

2°) Soit *n* un entier naturel quelconque. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$ (une seule égalité)