TS1

Devoir pour le 15-10-2015

I. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$, ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice.
Conjecturer sa nature (on écrira une seule phrase selon le modèle « D'après la calculatrice, il semble que la suite (u_n) soit … ».

2°) Démontrer cette conjecture.

II. Déterminer une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2$ pour n entier naturel quelconque.

Indications :

I. 1°)

• Il peut être intéressant de calculer les premiers termes « à la main » avant d'utiliser la calculatrice, ceci afin de vérifier que l'on sait bien utiliser la relation de récurrence.

• Le verbe « conjecturer » vient du mot « conjecture ». Émettre une conjecture en mathématiques signifie énoncer un résultat qui semble vrai, mais qui n'est pas encore démontré. Le mot conjecture en mathématiques est à distinguer du mot hypothèse qui a le sens de « donnée ».

II. La somme $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2$ peut aussi être écrite $\sum_{k=0}^{k=n} \left((-1)^k k^2\right)$.

Consignes :

• L'ensemble du devoir doit tenir sur une copie simple recto verso.

• Le devoir est à chercher à deux, mais chaque élève doit remettre une copie. Indiquer en haut de la copie, le nom de la personne avec qui on a travaillé.

Corrigé du DM pour le 15-10-2015

I.

a) D'après la calculatrice, il semble que la suite (u_n) soit arithmétique de raison 3.

b) Démontrons cette conjecture.

1ère méthode : on utilise un raisonnement par récurrence (récurrence simple).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_{n+1} = u_n + 3$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$u_0 = 1$ et $u_1 = 4$ par définition de la suite (u_n).

On constate que $u_1 = 1 + 3 = 4$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = u_k + 3$.
Démontrons que la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+2} = u_{k+1} + 3$.

On a $u_{k+2} = 2u_{k+1} - u_k$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut écrire : $u_{k+2} = 2(u_k + 3) - u_k$ soit $u_{k+2} = u_{k+1} + 3$.

Ainsi $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et qui si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc d'après le théorème de récurrence la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

2e méthode : on utilise une suite auxiliaire (meilleure méthode car la plus rapide et la plus simple).

3e méthode : on utilise une récurrence double (méthode qui n'est pas au programme de terminale).

II.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^2$.

On commence par calculer les premiers termes de la suite (S_n) soit « à la main » soit à l'aide de la calculatrice. On peut même rentrer directement la suite dans la calculatrice.

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ (c'est l'expression simplifiée en fonction de *n*, pas forcément facile à trouver directement).

Il y a plusieurs méthodes pour démontrer ce résultat.

1ère méthode : on utilise un raisonnement par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $S_n = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

On a : $S_0 = \sum_{k=0}^{k=0} (-1)^k k^2 = (-1)^0 \times 0^2 = 0$. Or $(-1)^0 \times \frac{0 \times (0+0)}{2} = 0$.

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *n* tel que la phrase $P(n)$ soit vraie c'est-à-dire $S_n = (-1)^n \times \frac{n(n+1)}{2}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{n+1} = (-1)^{n+1} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Pour cela, on écrit $S_{n+1} = S_n + \ldots$.

$$S_{n+1} = S_n + \left(-1\right)^{n+1} \times \left(n+1\right)^2$$

$$= \left(-1\right)^n \times \frac{n\left(n+1\right)}{2} + \left(-1\right)^{n+1} \times \left(n+1\right)^2$$

$$= \left(-1\right)^n \times \frac{n\left(n+1\right)}{2} + \left(-1\right)^n \times \left(-1\right) \times \left(n+1\right)^2$$

$$= \left(-1\right)^n \times \left(n+1\right)\left(\frac{n-2n-2}{2}\right) \quad \text{(on met } \left(-1\right)^n \times \left(n+1\right) \text{ en facteur)}$$

$$= \left(-1\right)^n \times \frac{\left(n+1\right)\left(-n-2\right)}{2}$$

$$= \left(-1\right)^n \times \frac{\left(n+1\right) \times \left(-\left(n+2\right)\right)}{2}$$

$$= \left(-1\right)^{n+1} \times \frac{\left(n+1\right) \times \left(n+2\right)}{2}$$

Ainsi $P\left(n+1\right)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P\left(0\right)$ est vraie et qui si $P\left(n\right)$ est vraie pour un entier naturel *n*, alors la phrase $P\left(n+1\right)$ est vraie.
Donc d'après le théorème de récurrence, la phrase $P\left(n\right)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

2e méthode :

On utilise la formule sommatoire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n\left(2n+1\right)\left(n+1\right)}{6}$.

Visualiser la somme des carrés des entiers. Nombres pyramidaux.

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/somme_carres.htm