1ère S1

Contrôle du mardi 15 décembre 2015 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………….…………

Note : ….. / 20

I. (4 points)

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$.

On effectuera les calculs au brouillon.

Chaque résultat sera donné sous forme simplifiée. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=\dfrac{5}{2-3x}$ $\qquad f'(x)=$ ……………………………………………

2°) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$ $\qquad f'(x)=$ ……………………………………………

3°) $f(x)=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{3}$ $\qquad f'(x)=$ ……………………………………………

4°) $f(x)=\dfrac{\left(x^4-1\right)^5}{2}$ $\qquad f'(x)=$ ……………………………………………

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 4 points)

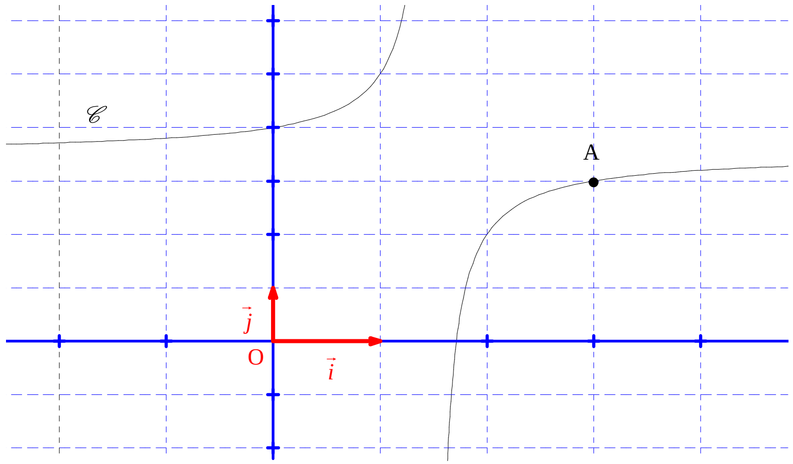
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-12}{2x-3}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ sans expliquer.

$f'(x)=$ ………………………………… (un seul résultat)

2°) À l'aide du 1°), déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 3 puis tracer T avec soin sur le graphique ci-contre.

Le coefficient directeur de T est égal à ………. (un seul résultat, sans égalité).



3°) Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de $\mathscr{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points)

Au moment des fêtes, un commerçant accorde une remise de 10 % si le montant total des achats est égal ou supérieur à 200 € et 5 % sinon.
On veut élaborer un algorithme qui, pour un montant total d'achat x en euros, affiche en sortie le montant y en euros après remise.
Compléter l'algorithme ci-dessous en langage naturel en utilisant les variables x et y.

- Il n'est pas demandé de réaliser le programme correspondant sur calculatrice.
- On respectera les règles usuelles de rédaction d'un algorithme. En particulier, on rappelle que l'affectation d'une variable s'écrit « *a* prend la valeur … ».
- On veillera également à utiliser une « barre d'indentation » permettant une meilleure lisibilité.

Entrée :

Traitement :

Sortie :

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x+3$.

On choisit un nombre de départ par exemple 1, qui va nous permettre de construire une suite de nombres en utilisant la fonction *f*.

On calcule l'image de ce nombre par *f*. On obtient $2\times1+3=5$.

On recommence avec 5. On calcule l'image de 5 par *f*. On obtient 13.

On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 1 ; 5 ; 13 … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction *f*.

1°) On choisit – 2 pour nombre de départ.
Écrire les 3 nombres suivants obtenus par le procédé décrit précédemment.

2°) On choisit $\frac{1}{3}$ pour nombre de départ.
Écrire les 3 nombres suivants.

3°) On choisit $\frac{3}{7}$ pour nombre de départ.
Utiliser la commande Rép de la calculatrice pour donner la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut du dixième nombre obtenu.

Corrigé du contrôle du 15-12-2015

I.

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$.
On effectuera les calculs au brouillon.
Chaque résultat sera donné sous forme simplifiée. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=\dfrac{5}{2-3x}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{15}{(2-3x)^2}$

2°) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{-x^2+4x+5}{\left(x^2+3x-1\right)^2}$

3°) $f(x)=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{3}$ $\qquad f'(x)=-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$

4°) $f(x)=\dfrac{\left(x^4-1\right)^5}{2}$ $\qquad f'(x)=10x^3\left(x^4-1\right)^4$

5°) $f(x)=\dfrac{5}{2-3x}$

$$f(x)=5\times\frac{1}{2-3x}$$

$$f'(x)=5\times\left(-\frac{-3}{(2-3x)^2}\right)$$

$$=\frac{15}{(2-3x)^2}$$

2°) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x-1}$

$$f'(x)=\frac{1\times\left(x^2+3x-1\right)-(x-2)(2x+3)}{\left(x^2+3x-1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+3x-1-\left(2x^2+3x-4x-6\right)}{\left(x^2+3x-1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+3x-1-\left(2x^2-x-6\right)}{\left(x^2+3x-1\right)^2}$$

$$=\frac{x^2+3x-1-2x^2+x+6}{\left(x^2+3x-1\right)^2}$$

$$=\frac{-x^2+4x+5}{\left(x^2+3x-1\right)^2}$$

3°) $f(x)=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{3}$

$$f(x)=\frac{1}{3}\times\left(1-2\sqrt{x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\times\left(-\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)$$

$$=-\frac{1}{3\sqrt{x}}$$

4°) $f(x)=\dfrac{\left(x^4-1\right)^5}{2}$

$$f(x)=\frac{1}{2}\times\left(x^4-1\right)^5$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\times5\times4x^3\times\left(x^4-1\right)^4$$

$$=10x^3\left(x^4-1\right)^4$$

II.

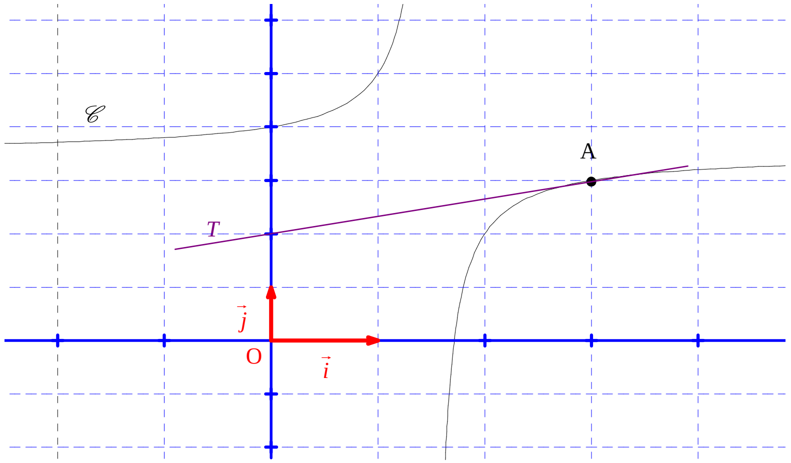
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-12}{2x-3}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ sans expliquer.

$$f'(x) = \frac{3}{(2x-3)^2} \text{ (un seul résultat)}$$

2°) À l'aide du 1°), déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 3 puis tracer T avec soin sur le graphique ci-contre.

Le coefficient directeur de T est égal à $\dfrac{1}{3}$ (un seul résultat, sans égalité).



3°) Déterminer les coordonnées du (ou des) point(s) de $\mathscr{C}$ en lequel (lesquels) la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$.

On cherche $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ tel que $f'(a) = \dfrac{3}{4}$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{3}{(2a-3)^2} = \frac{3}{4}$$

$\cancel{3} \times 4 = \cancel{3} \times (2a-3)^2$ (produit en croix)

$$(2a-3)^2 = 4$$

$2a-3 = 2$ ou $2a-3 = -2$

$a = \dfrac{5}{2}$ ou $a = \dfrac{1}{2}$

Ces deux valeurs conviennent car elles sont toutes les deux différentes de $\dfrac{3}{2}$.

On calcule les ordonnées des points d'abscisses $\dfrac{5}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7\times\frac{5}{2}-12}{2\times\frac{5}{2}-3} = \frac{\frac{35}{2}-12}{2} = \frac{\frac{35-24}{2}}{2} = \frac{\frac{11}{2}}{2} = \frac{11}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7\times\frac{1}{2}-12}{2\times\frac{1}{2}-3} = \frac{\frac{7}{2}-12}{-2} = \frac{\frac{7-24}{2}}{-2} = \frac{-\frac{17}{2}}{-2} = \frac{17}{4}$$

$\mathscr{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$ aux points $\mathrm{E}\left(\dfrac{5}{2} ; \dfrac{11}{4}\right)$ et $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{17}{4}\right)$.

III.

Au moment des fêtes, un commerçant accorde une remise de 10 % si le montant total des achats est égal ou supérieur à 200 € et 5 % sinon.
On veut élaborer un algorithme qui, pour un montant total d'achat x en euros, affiche en sortie le montant y en euros après remise.
Compléter l'algorithme ci-dessous en langage naturel en utilisant les variables x et y.

- Il n'est pas demandé de réaliser le programme correspondant sur calculatrice.
- On respectera les règles usuelles de rédaction d'un algorithme. En particulier, on rappelle que l'affectation d'une variable s'écrit « a prend la valeur … ».
- On veillera également à utiliser une « barre d'indentation » permettant une meilleure lisibilité.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Si $x \geqslant 200$
Alors y prend la valeur $0{,}9x$
Sinon y prend la valeur $0{,}95x$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Après réduction de 10 %, le montant devient $x-\frac{10}{100}x=x-0{,}1x=0{,}9x$.

Après réduction de 5 %, le montant devient $x-\frac{5}{100}x=x-0{,}05x=0{,}95x$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x+3$.

On choisit un nombre de départ par exemple 1, qui va nous permettre de construire une suite de nombres en utilisant la fonction *f*.

On calcule l'image de ce nombre par *f*. On obtient $2\times1+3=5$.

On recommence avec 5. On calcule l'image de 5 par *f*. On obtient 13.

On obtient ainsi une suite infinie de nombres : 1 ; 5 ; 13 … dans laquelle chaque nombre sauf le premier est l'image du précédent par la fonction *f*.

1°) On choisit – 2 pour nombre de départ.
Écrire les 3 nombres suivants obtenus par le procédé décrit précédemment.

– 1	1	5

2°) On choisit $\frac{1}{3}$ pour nombre de départ.

Écrire les 3 nombres suivants.

$\frac{11}{3}$	$\frac{31}{3}$	$\frac{71}{3}$

3°) On choisit $\frac{3}{7}$ pour nombre de départ.

Utiliser la commande Rép de la calculatrice pour donner la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut du dixième nombre obtenu.

3507,857

La valeur exacte du résultat est $\frac{24555}{7}$.