TS1

Contrôle du mardi 15 décembre 2015 (50 minutes)

Prénom et nom : ……..…… **Note :** …….. **/ 20**

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Le seuil maximum d'alcoolémie toléré pour conduire une automobile est 0,5 gramme par litre. Un laboratoire a mis au point un éthylotest. Théoriquement, celui-ci devrait être positif si et seulement si la personne testée a une alcoolémie strictement supérieure au seuil toléré. Mais il n'est pas parfait :
• lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré, l'éthylotest est positif 96 fois sur 100 ;
• lorsqu'une personne a un taux d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré, l'éthylotest est positif 3 fois sur 100.
On suppose que ces résultats portent sur un échantillon suffisamment important pour qu'ils soient constants. Dans une région donnée, 95 % des conducteurs d'automobile ont un seuil d'alcoolémie inférieur ou égal au seuil toléré.
On soumet, au hasard, un automobiliste de cette région, à l'éthylotest.

1°) Calculer la probabilité que l'éthylotest soit positif (valeur exacte sous forme décimale).

2°) Calculer la probabilité qu'il ait un taux d'alcoolémie strictement supérieur au seuil toléré, sachant que l'éthylotest est positif (valeur arrondie au millième).

3°) Calculer la probabilité pour que l'éthylotest donne un résultat erroné (valeur exacte sous forme décimale).

Compléter le tableau suivant en écrivant un seul résultat à chaque fois, sans égalité.

1°) ……	2°) ……	3°) ……

II. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) a) 1 point ; b) 1 point ; c) 1 point ; 4°) 2 points)

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher, d'un sac contenant une boule noire et neuf boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir le six avec le dé pour gagner.
On note A l'événement « la boule noire figure parmi les boules tirées » et B l'événement « le joueur gagne ».
On admet que $P(\mathrm{A})=\frac{2}{5}$.

1°) Calculer $P(\mathrm{B})$ (valeur exacte sous forme décimale).

2°) Le joueur ne gagne pas.
Calculer la probabilité qu'il ait tiré la boule noire (valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible).

3°) On joue 50 fois au jeu dans des conditions identiques indépendantes.
On donnera les valeurs arrondies au millième.

Calculer la probabilité :

a) de gagner au moins 20 fois ; b) de perdre au plus 25 fois ; c) de gagner entre 15 et 30 fois (15 et 30 compris).

4°) On reprend la même règle du jeu qu'au début de l'énoncé en supposant cette fois que le sac contient une boule noire et n boules blanches, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 4.
On admet alors que $P(\mathrm{A})=\frac{4}{n+1}$.
Exprimer $P(\mathrm{B})$ en fonction de n (résultat sous la forme d'un seul quotient).

1°) $P(\mathrm{B})=$.....	2°) …… (écrire une égalité en utilisant A et B)

Pour les résultats du 3°), écrire un seul résultat à chaque fois.

3°) a) ……	b) ……	c) ……

4°) $P(\mathrm{B})=$.....

III. (5 points : 1°) 1 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Pour participer à un jeu, un joueur mise 1 €. Il lance ensuite deux dés tétraédriques non truqués dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 puis il calcule la somme des numéros inscrits sur les faces inférieures.
Si la somme est égale à 5, il gagne 4 €. Si la somme est égale à 4, il perd x € $(x>0)$. Dans les autres cas, il ne perd ni ne gagne rien (il perd toutefois sa mise).
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (on pensera à tenir compte de la mise).

On donne dans le tableau ci-dessous les probabilités des différentes sommes que l'on peut obtenir :

Somme	2	3	4	5	6	7	8
Probabilité	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

1°) Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de x.

2°) Dans cette question, on prend $x=2$.
Calculer la variance de X. On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

3°) On répète l'expérience aléatoire 200 fois dans des conditions identiques indépendantes.
Déterminer à l'aide de la calculatrice l'intervalle de fluctuation « exact » I au seuil de 95 % de la fréquence de l'événement E : « obtenir une somme supérieure ou égale à 5 ». On donnera les bornes sous forme décimale.

4°) Question bonus : calculer $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ en fonction de x.

1°) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=$.....	2°) $\mathrm{V}(\mathrm{X})=$.....	3°) $\mathrm{I}=\left[\ldots\ldots\ldots\ ;\ \ldots\ldots\ldots\right]$

Corrigé du contrôle du 15-12-2015

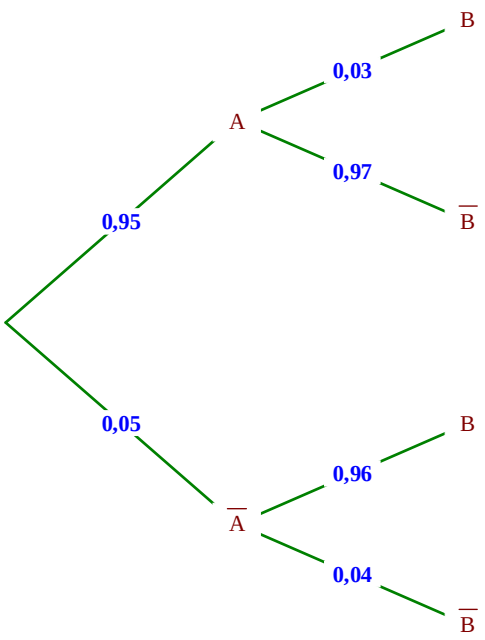
I.

On définit les événements :

A : « le taux d'alcoolémie du conducteur est inférieur ou égal au seuil toléré » ;

B : « l'éthylotest est positif ».

On dresse un arbre de probabilités.



1°) Les événements A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times P(B / A) + P(\overline{A}) \times P(B / \overline{A})$$

$$= 0,95 \times 0,03 + 0,05 \times 0,96$$

$$= 0,0285 + 0,048$$

$$= 0,0765$$

2°)

On cherche $P(\overline{A} / B)$.

$$P(\overline{A} / B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,96}{0,0765}$$

$$= \frac{0,048}{0,0765}$$

$$= 0,627450980...$$

$P(\overline{A} / B) \approx 0,627$ (valeur arrondie au centième)

3°) On considère l'événement E : « l'éthylotest donne un résultat erroné ».

On a : $E = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ sont incompatibles donc on a :

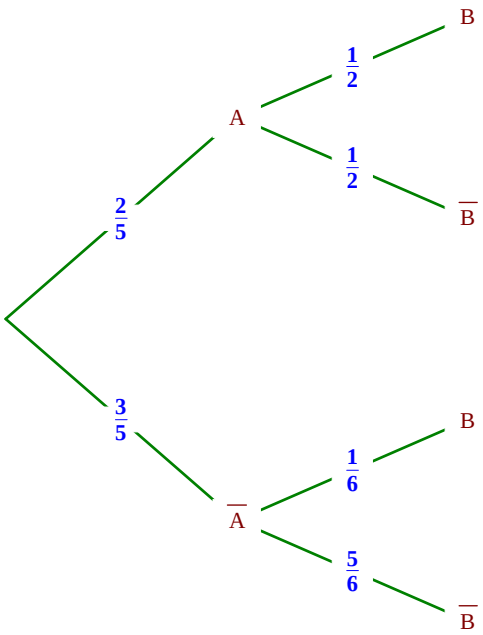
$$P(E) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

$$= 0,95 \times 0,03 + 0,05 \times 0,04$$

$$= 0,0285 + 0,002$$

$$= 0,0305$$

II.



1°) Calculons $P(B)$.

A et $\overline{A}$ constituent un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)\times P(B/A)+P(\overline{A})\times P(B/\overline{A}) \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{10} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

2°) Déterminons $P(A/\overline{B})$.

$$\begin{aligned} P(A/\overline{B}) &= \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{P(A)\times P(\overline{B}/A)}{P(\overline{B})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

3°)

a) 0,085

On fait « 1 – binomFRép(50,0.3,19) ».

La probabilité vaut 0,084802599….

b) 0,002

Perdre au plus 25 fois signifie gagner au moins 25 fois.

On fait « 1 – binomFRép(50,0.3,24) ».

0,002369547…

c) 0,553

On fait « binomFRép(50,0.3,30) – binomFRép(50,0.3,14) ».

0,55316559…

4°) On reprend la formule des probabilités totales comme dans la question 1°).

On doit calculer $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{4}{n+1}=\frac{n-3}{n+1}$.

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{4}{n+1}\times\frac{1}{2}+\frac{n-3}{n+1}\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{n+1}+\frac{n-3}{6(n+1)} \\ &= \frac{9+n}{6(n+1)} \end{aligned}$$

On retrouve le résultat du 1°) en prenant $n=9$.

III.

1°) On dresse le tableau donnant la loi de probabilité de X.

x_i	3	$-x-1$	-1
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=3\times\frac{4}{16}+(-x-1)\times\frac{3}{16}-1\times\frac{9}{16}$$

$$=\frac{12+3(-x-1)-9}{16}$$

$$=-\frac{3x}{16}$$

2°)

x_i	3	-3	-1
$P(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$

D'après le résultat de la question précédente pour $x=2$, on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X})=-\frac{3\times 2}{16}$$

$$=-\frac{3}{8}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=3^2\times\frac{4}{16}+(-3)^2\times\frac{3}{16}+(-1)^2\times\frac{9}{16}-\left(-\frac{3}{8}\right)^2$$

$$=4,359375$$

Quelques élèves ont mal lu l'énoncé et ont donné la réponse sous forme fractionnaire : $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{279}{64}$.

3°) La probabilité de l'événement « obtenir une somme supérieure ou égale à 5 » est égale à $p=\frac{4}{16}+\frac{3}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}=0,625$.

On utilise la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0,625$.
Avec les notations usuelles, on trouve $a=111$ et $b=138$.

On a donc $\mathrm{I}=\left[\frac{111}{200};\frac{138}{200}\right]$ soit $\mathrm{I}=[0,555;0,69]$.

On constate que cet intervalle contient bien la probabilité *p*.
Cet intervalle n'est pas centré en *p*.

4°)

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=9\times\frac{4}{16}+\frac{3(-x-1)^2}{16}+\frac{9}{16}-\frac{9x^2}{16^2}$$

$$=\frac{45+3(-x-1)^2}{16}-\frac{9x^2}{16^2}$$

$$=\frac{48+3x^2+6x}{16}-\frac{9x^2}{16^2}$$

$$=3+\frac{3x^2+6x}{16}-\frac{9x^2}{16^2}$$

$$=3+\frac{48x^2+96x-9x^2}{16^2}$$

$$=3+\frac{39x^2+96x}{256}$$

$$=\frac{39x^2+96x+768}{256}$$

On peut aussi donner la réponse sous la forme $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{39}{256}x^2+\frac{3}{8}x+3$.