Méthode de Lagrange
ou de la sécante
ou des cordes

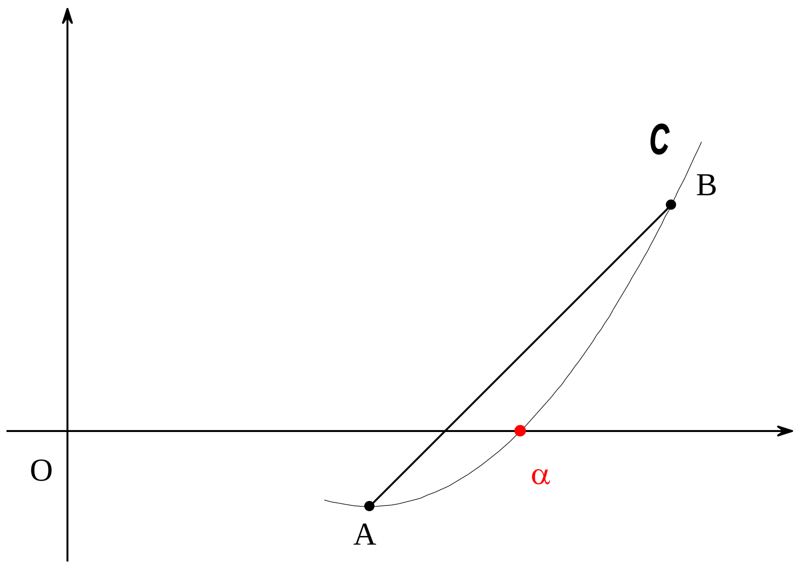
Joseph-Louis Lagrange est un mathématicien français né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813.

Présentation et principe :

Plusieurs méthodes existent pour trouver une valeur approché de la solution de la forme $f(x)=0$ comme celles vues en cours : le balayage et la dichotomie. Le principe de chaque méthode est de diminuer par étapes successives l'amplitude de l'intervalle dans lequel se trouve la solution.

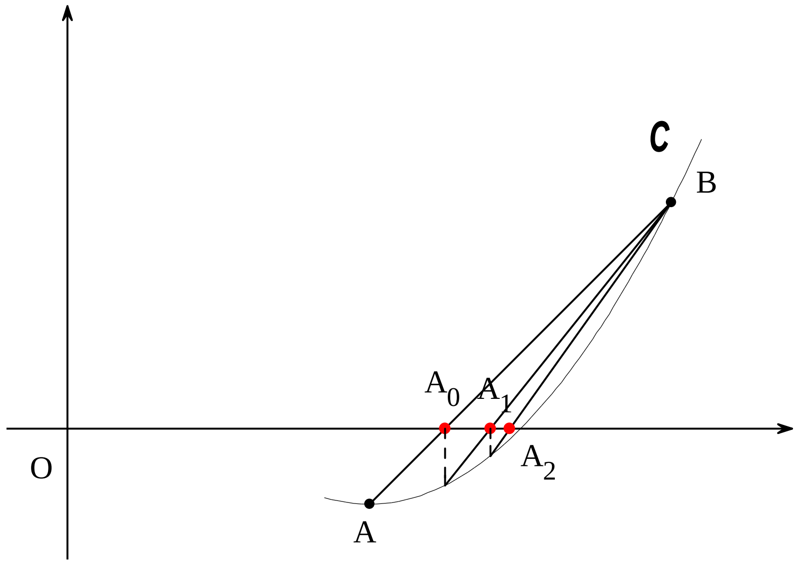
On va étudier la méthode de Lagrange, qui consiste à « remplacer » la courbe représentative de *f* par le segment $[AB]$ avec $A(a\ ;\ f(a))$ et $B(b\ ;\ f(b))$.

On considère deux points qui « encadrent » la solution.



Graphique 1

On rend le processus itératif en fixant B et en considérant des points A_0, A_1, A_2, … comme le montre le graphique 2.



Graphique 2

Nous allons considérer le graphique 1.

On note α la solution de l'équation $f(x)=0$.

Déterminons l'abscisse du point d'intersection de la droite (AB) et de l'axe des abscisses.
Cette abscisse sera une valeur approchée de α.

(AB) a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x-a & b-a \\ y-f(a) & f(b)-f(a) \end{vmatrix}=0$ (condition de colinéarité de deux vecteurs).

On remplace y par 0.

On obtient :

$$\begin{vmatrix} x-a & b-a \\ -f(a) & f(b)-f(a) \end{vmatrix}=0$$

$$(x-a)\left(f(b)-f(a)\right)+f(a)(b-a)=0$$

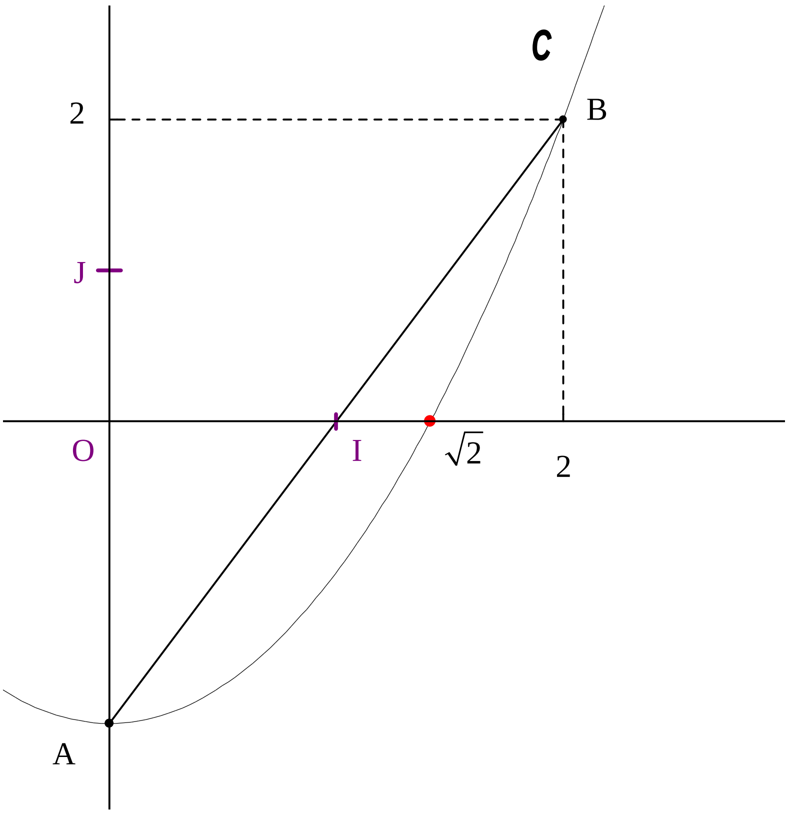
$$x=\frac{f(a)(a-b)}{f(b)-f(a)}+a$$

On obtient : $\boxed{x=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}}$.

Exemple de mise en application :

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$.

On s'intéresse à la solution positive de l'équation $f(x) = 0$.



Graphique 3

On va prendre les points $A(0\,;-2)$ et $B(2\,;2)$.

On considère la suite (x_n) qui donne les abscisses des points d'intersection des cordes avec l'axe des abscisses selon la méthode qui vient d'être exposée.

Cette suite est définie par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n \times 2 - 2f(x_n)}{2 - f(x_n)} \end{cases}$.

On va arranger la relation de récurrence en utilisant l'expression de *f*.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2x_n - 2\left(x_n{}^2 - 2\right)}{2 - \left(x_n{}^2 - 2\right)} \\ &= \frac{2x_n - 2x_n{}^2 + 4}{4 - x_n{}^2} \end{aligned}$$

Il est possible d'arranger l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{2\left(x_n - {x_n}^2 + 2\right)}{4 - {x_n}^2} \\
&= \frac{2\left(2 - x_n\right)\left(x_n + 1\right)}{\left(2 - x_n\right)\left(2 + x_n\right)} \\
&= \frac{2\left(x_n + 1\right)}{2 + x_n}
\end{aligned}$$

On rentre la suite dans la calculatrice.

$n\text{Min} = 0$

$u\left(n\text{Min}\right) = 0$

Il semble que la suite $\left(x_n\right)$ converge vers $\sqrt{2}$.

On peut démontrer que $\left(x_n\right)$ converge bien vers $\sqrt{2}$.

On observe une convergence rapide vers $\sqrt{2}$ en dépit de la simplicité de la méthode.