1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 24 novembre 2015 (30 minutes)

Prénom et nom : …………………………..…………

Note : ….. / 20

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

120 personnes atteintes d'une maladie ont accepté de participer à une étude pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament. Pendant 1 mois, 80 personnes ont pris le médicament ; les autres ont pris un placebo. À l'issue de l'expérimentation, on a constaté une amélioration de la santé de 60 personnes parmi celles ayant pris le médicament et de 5 personnes parmi les autres.

Compléter le tableau d'effectifs suivant.

	Ont vu leur état s'améliorer	**N'ont pas vu leur état s'améliorer**	**Total**
Ont pris le médicament	…	…	…
Ont pris le placebo	…	…	…
Total	…	…	120

On donnera les résultats sous forme décimale éventuellement arrondis au millième.

1°) On choisit une personne au hasard qui a participé à l'étude.
Calculer la probabilité que la personne ait pris le médicament et ait vu son état s'améliorer.

………………….. (un seul résultat)

2°) On choisit au hasard une personne qui a participé à l'étude et qui a pris le médicament.
Calculer la probabilité que cette personne ait vu son état s'améliorer.

………………….. (un seul résultat)

3°) On choisit au hasard une personne qui a participé à l'étude et qui a vu son état s'améliorer.
Calculer la probabilité que cette personne ait pris le placebo.

………………….. (un seul résultat)

II. (7 points : 1°) 1 point + 2 points ; 2°) 2 points + 2 points)

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires. On tire toutes les boules, l'une après l'autre et sans remise. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche.
X peut prendre les valeurs $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$. On admet que la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
$P(\text{X}=x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

1°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
On détaillera uniquement sur les lignes ci-dessous le calcul de la variance (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »). Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

$\text{E}(\text{X})=$ ………………… $\text{V}(\text{X})=$ …………………

………

………

………

2°) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. On rappelle que F est définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{F}(x)=P(\text{X}\leqslant x)$.
Donner l'expression de F suivant les valeurs de *x*. On se contentera de donner les résultats en distinguant des cas sans détailler les calculs (un cas par ligne).

………

………

………

………

………

Tracer la représentation graphique de F sur le graphique au verso. On fera attention aux points d'arrêt.

III. (3 points)

On considère le jeu suivant pour lequel une partie se déroule de la manière suivante :
Le joueur lance deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si elle tombe deux fois sur « pile », le joueur gagne 4 €. Si elle tombe une fois sur « pile », le joueur perd 1 €. Sinon (la pièce tombe deux fois sur « face »), le joueur ne gagne rien. Le joueur paye 3 € pour une partie.
On note X le gain algébrique en euros du joueur à l'issue d'une partie.

Compléter la phrase suivante :

X peut prendre les valeurs $x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $x_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	
$P(\mathrm{X} = x_i)$	

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère le polynôme $P(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 1$ où m est un réel non nul.

1°) Calculer le discriminant réduit Δ' de $P(x)$ en fonction de m.

$\Delta' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(un seul résultat sous forme développée réduite)

2°) Déterminer le(s) réel(s) m pour lequel (lesquels) le polynôme $P(x)$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (résultats sans égalité, sans faire de phrase)

Corrigé du contrôle du 24-11-2015

I.

120 personnes atteintes d'une maladie ont accepté de participer à une étude pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament. Pendant 1 mois, 80 personnes ont pris le médicament ; les autres ont pris un placebo. À l'issue de l'expérimentation, on a constaté une amélioration de la santé de 60 personnes parmi celles ayant pris le médicament et de 5 personnes parmi les autres.

Compléter le tableau d'effectifs suivant.

	Ont vu leur état s'améliorer	**N'ont pas vu leur état s'améliorer**	**Total**
Ont pris le médicament	60	20	80
Ont pris le placebo	5	35	40
Total	65	55	120

On donnera les résultats sous forme décimale éventuellement arrondis au millième.

1°) On choisit une personne au hasard qui a participé à l'étude.
Calculer la probabilité que la personne ait pris le médicament et ait vu son état s'améliorer.

0,5 (un seul résultat)

2°) On choisit au hasard une personne qui a participé à l'étude et qui a pris le médicament.
Calculer la probabilité que cette personne ait vu son état s'améliorer.

0,75 (un seul résultat)

3°) On choisit au hasard une personne qui a participé à l'étude et qui a vu son état s'améliorer.
Calculer la probabilité que cette personne ait pris le placebo.

0,077 (un seul résultat)

1°) $\frac{60}{120}=\frac{1}{2}=0,5$

2°) $\frac{60}{80}=\frac{3}{4}=0,75$

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle : probabilité que la personne ait vu son état s'améliorer sachant qu'elle a pris le médicament.

3°) $\frac{5}{65}=\frac{1}{13}=0,07692307...$

Il s'agit d'une probabilité conditionnelle : probabilité que la personne ait pris le placebo sachant qu'elle a vu son état s'améliorer.

Beaucoup d'élèves n'ont pas bien lu l'énoncé et ont donné les résultats sous forme de fractions.

II.

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires. On tire toutes les boules, l'une après l'autre et sans remise. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche.
On admet que la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,4	0,3	0,2	0,1

1°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
On détaillera le calcul de $V(X)$ (2 ou 3 étapes de calculs seulement en écrivant directement la formule utilisée en « situation »). Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

$E(X)=2$ $\qquad$ $V(X)=1$

$$\begin{aligned}E(X)&=1\times0,4+2\times0,3+3\times0,2+4\times0,1\\&=2\end{aligned}$$

Il y a deux méthodes pour calculer la variance.

1$^{\text{ère}}$ méthode : avec la définition

$$\begin{aligned}V(X)&=(x_1-2)^2\times P(X=x_1)+(x_2-2)^2\times P(X=x_2)+(x_3-2)^2\times P(X=x_3)+(x_4-2)^2\times P(X=x_4)\\&=(1-2)^2\times0,4+(2-2)^2\times0,3+(3-2)^2\times0,2+(4-2)^2\times0,1\\&=1\times0,4+1\times0,2+4\times0,1\\&=1\end{aligned}$$

2$^{\text{e}}$ méthode : avec la formule de Kœnig-Huygens

$$\begin{aligned}V(X)&={x_1}^2\times P(X=x_1)+{x_2}^2\times P(X=x_2)+{x_3}^2\times P(X=x_3)+{x_4}^2\times P(X=x_4)-[E(X)]^2\\&=1^2\times0,4+2^2\times0,3+3^2\times0,2+4^2\times0,1-2^2\\&=1\end{aligned}$$

2°) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. On rappelle que F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=P(X\leqslant x)$.
Donner l'expression de F suivant les valeurs de x. On se contentera de donner les résultats en distinguant des cas sans détailler les calculs (un cas par ligne).

- Si $x<1$, alors $F(x)=0$.

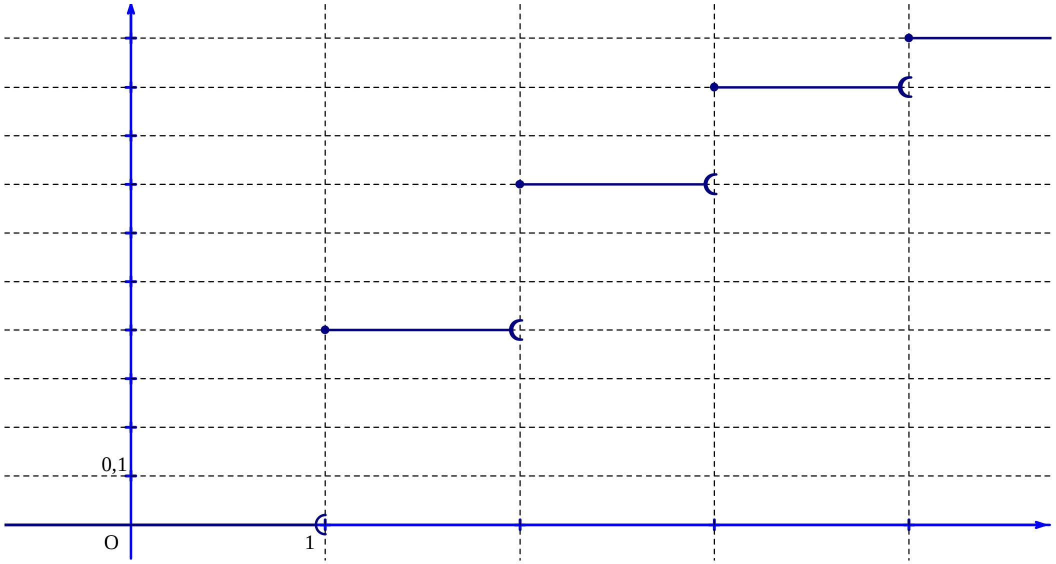
- Si $1\leqslant x<2$, alors $F(x)=0,4$.

- Si $2\leqslant x<3$, alors $F(x)=0,3+0,4=0,7$.

- Si $3\leqslant x<4$, alors $F(x)=0,2+0,3+0,4=0,9$.

- Si $x\geqslant 4$, alors $F(x)=1$.

Tracer la représentation graphique de F sur le graphique au verso. On fera attention aux points d'arrêt.



III.

On considère le jeu suivant pour lequel une partie se déroule de la manière suivante :
Le joueur lance deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
Si elle tombe deux fois sur « pile », le joueur gagne 4 €. Si elle tombe une fois sur « pile », le joueur perd 1 €. Sinon (la pièce tombe deux fois sur « face »), le joueur ne gagne rien. Le joueur paye 3 € pour une partie.
On note X le gain algébrique en euros du joueur à l'issue d'une partie.

Compléter la phrase suivante :

X peut prendre les valeurs $x_1=1$, $x_2=-4$, $x_3=-3$.

On tient compte de la mise de 3 €. Les valeurs possibles de X sont donc $4-3=1$, $-1-3=-4$, $0-3=-3$.

Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	1	-4	-3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Pour calculer les probabilités, on utilise un arbre de probabilités.

On note P le résultat pile et F le résultat face.
À l'issue des deux lancers, il y a quatre résultats possibles : $(P\,;P)$, $(P\,;F)$, $(F\,;P)$, $(F\,;F)$.

Tous les résultats ont la même probabilité donc chaque résultat a pour probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour le résultat $(P\,;P)$, le gain algébrique est de $4-3=1$ €.
Pour le résultat $(P\,;F)$, le gain algébrique est de $-1-3=-4$ €.
Pour le résultat $(F\,;P)$, le gain algébrique est de $-1-3=-4$ €.
Pour le résultat $(F\,;F)$, le gain algébrique est de $0-3=-3$ €.

$P(X=1)=\frac{1}{4}$ $\quad$ $P(X=-4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (on « rassemble » les deux résultats) $\quad$ $P(X=-3)=\frac{1}{4}$

IV.

On considère le polynôme $P(x)=mx^2-2(m-1)x+1$ où m est un réel non nul.

1°) Calculer le discriminant réduit Δ' de $P(x)$ en fonction de m.

$$\Delta'=m^2-3m+1$$

(un seul résultat sous forme développée réduite)

$P(x)$ est un polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+c avec $a=m$, $b=-2(m-1)$, $c=1$.

On pose $b'=\frac{b}{2}=-(m-1)$.

On calcule le discriminant réduit Δ'.

$$\begin{aligned}\Delta'&=\left[-(m-1)\right]^2-m\times 1\\&=(m-1)^2-m\\&=m^2-2m+1-m\\&=m^2-3m+1\end{aligned}$$

2°) Déterminer le(s) réel(s) m pour lequel (lesquels) le polynôme $P(x)$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

(résultats sans égalité, sans faire de phrase)

Le polynôme $P(x)$ admet une racine double dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\Delta' = 0$

si et seulement si $m^2 - 3m + 1 = 0$

si et seulement si $m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $m = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Pour écrire cette dernière ligne, on calcule le discriminant de l'équation $m^2 - 3m + 1 = 0$.