TS1

Contrôle du mardi 24 novembre 2015 (50 minutes)

Prénom et nom : ……..……

Note : …….. / 20

I. (8 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$e^{2-\frac{1}{x}}=1$ (1) ; $e^{(e^x)}=e$ (2) ; $2<e^x<3$ (3) ; $e^{3x+1}-e^{3x-1}=2$ (4) ;

$\frac{1+e^x}{3e^x}<1$ (5) ; $\frac{e^x-2}{e^x-1}>0$ (6) ; $\left|e^x-1\right|=2$ (7) ; $\left(e^{2x}\right)^3=\frac{e^{x+1}}{e^{-3}}$ (8).

Donner directement sans explication les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, … S_8 de ces équations et inéquations.

$S_1=$	$S_2=$	$S_3=$	$S_4=$ .....

$S_5=$	$S_6=$	$S_7=$	$S_8=$ .....

II. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \left(2x^2-3x+2\right)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x)=$ ..... (un seul résultat sous forme factorisée)

2°) Compléter le tableau suivant afin de déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Compléter la dernière ligne avec les extremums de f en valeur exacte.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de	
Signe de	
Signe de $f'(x)$	
Variations de f	

3°) Calculer $f''(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f''(x)=$ ..... (un seul résultat sous forme factorisée)

III. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 1 point ; 3°) 2 points)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+x)^n}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f_n'(x) = \dfrac{(1+x-n)e^x}{(1+x)^{n+1}}$.

On écrira : $f_n(x) = e^x \times \dfrac{1}{(1+x)^n}$. On attend deux lignes de calculs avant de parvenir au résultat final.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad f_n'(x) =$ .....

= .....

= ..... (résultat final)

2°) Justifier que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées et donner une équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}_n$ en A.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3°) Déterminer sans justifier les coordonnées du point B_n de $\mathcal{C}_n$ en lequel la tangente est horizontale.

.....

Corrigé du contrôle du 24-11-2015

I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$e^{2-\frac{1}{x}}=1$ (1) ; $e^{(e^x)}=e$ (2) ; $2<e^x<3$ (3) ; $e^{3x+1}-e^{3x-1}=2$ (4) ;

$\frac{1+e^x}{3e^x}<1$ (5) ; $\frac{e^x-2}{e^x-1}>0$ (6) ; $\left|e^x-1\right|=2$ (7) ; $\left(e^{2x}\right)^3=\frac{e^{x+1}}{e^{-3}}$ (8).

Donner directement sans explication les ensembles de solutions respectifs S_1, S_2, … S_8 de ces équations et inéquations.

$S_1=\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$S_2=\{0\}$	$S_3=]\ln 2\,;\ln 3[$	$S_4=\left\{\frac{1}{3}\ln\frac{2e}{e^2-1}\right\}$

$S_5=\left]\ln\frac{1}{2};+\infty\right[$	$S_6=]-\infty\,;0[\cup]\ln 2\,;+\infty[$	$S_7=\{\ln 3\}$	$S_8=\left\{\frac{4}{5}\right\}$

(1) $\Leftrightarrow 2-\frac{1}{x}=0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=2$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

(2) $\Leftrightarrow e^x=1$

$\Leftrightarrow x=0$

(3) $\Leftrightarrow \ln 2<x<\ln 3$

(4) $\Leftrightarrow e^{3x}\times e-e^{3x}\times e^{-1}=2$

$\Leftrightarrow e^{3x}\times\left(e-e^{-1}\right)=2$

$\Leftrightarrow e^{3x}=\frac{2}{e-e^{-1}}$

$\Leftrightarrow 3x=\ln\frac{2}{e-e^{-1}}$ car $\frac{2}{e-e^{-1}}>0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{e-e^{-1}}$ (ou $x=\frac{1}{3}\ln\frac{2e}{e^2-1}$ en transformant le quotient)

$\frac{1+e^x}{3e^x}<1$ (5)

(5) $\Leftrightarrow 1+e^x<3e^x$

$\Leftrightarrow 1<2e^x$

$\Leftrightarrow e^x>\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x>\ln\frac{1}{2}$

Pour résoudre l'inéquation (6), on dresse un tableau de signe du quotient $\frac{e^x-2}{e^x-1}$. Le numérateur s'annule pour $x=\ln 2$; le dénominateur s'annule pour $x=0$.

(7) $\Leftrightarrow e^x-1=2$ ou $e^x-1=-2$

$\Leftrightarrow e^x=3$ ou $e^x=-1$ (impossible)

$\Leftrightarrow x=\ln 3$

(8) $\Leftrightarrow e^{6x}=e^{x+4}$

$\Leftrightarrow 6x=x+4$

$\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$

II.

On considère la fonction $f: x\mapsto\left(2x^2-3x+2\right)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\left(2x^2+x-1\right)e^x$ (un seul résultat sous forme factorisée)

On applique la formule de dérivée d'un produit.

2°) Compléter le tableau suivant afin de déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Compléter la dernière ligne avec les extremums de f en valeur exacte.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de e^x		+		+		+	
Signe de $2x^2+x-1$		+	0	–	0	+	
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	
Variations de f		↗	$\frac{7}{e}$	↘	$\sqrt{e}$	↗	

3°) Calculer $f''(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = x(2x+5)e^x \text{ (un seul résultat sous forme factorisée)}$$

III.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+x)^n}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f_n'(x) = \dfrac{(1+x-n)e^x}{(1+x)^{n+1}}$.

On écrira : $f_n(x) = e^x \times \dfrac{1}{(1+x)^n}$. On attend deux lignes de calculs avant de parvenir au résultat final.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f_n'(x) = e^x \times \frac{1}{(1+x)^n} + e^x \times \left[-\frac{n}{(1+x)^{n+1}} \right]$$

$$= e^x \times \frac{1+x-n}{(1+x)^{n+1}} \text{ (résultat final)}$$

2°) Justifier que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées et donner une équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}_n$ en A.

Pour résoudre cette question, on peut tracer les courbes $\mathcal{C}_n$ pour différentes valeurs de n.
On observe aisément que ces courbes passent toutes par le point $A(0;1)$.
On effectue ensuite la démonstration en effectuant un calcul.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(0) = \frac{e^0}{(1+0)^n}$$
$$= \frac{1}{1^n}$$
$$= 1$$

Donc toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point $A(0;1)$.

Une équation de T_n s'écrit $y = f_n'(0)(x-0) + f_n(0)$.

$f_n'(0) = 1-n$ donc T_n a pour équation $y = (1-n)x+1$.

3°) Déterminer sans justifier les coordonnées du point B_n de $\mathcal{C}_n$ en lequel la tangente est horizontale.

$$B_n\left(n-1; \frac{e^{n-1}}{n^n}\right)$$

On résout l'équation $f_n'(x) = 0$ (1) dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$(1) \Leftrightarrow e^x \times \frac{1+x-n}{(1+x)^{n+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1+x-n = 0 \text{ (car } e^x > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = n-1$$

$$f_n(n-1) = e^{n-1} \times \frac{1}{(1+n-1)^n}$$

$$= \frac{e^{n-1}}{n^n}$$