



Prénom : Nom :

- Le barème est donné sur 40.
- On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.
- Il est demandé de ne rien écrire sur cet énoncé en dehors du tracé demandé dans l'exercice III à la question 2°) a).

I. (8 points)

Dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse sans justifier les réponses.

*Chaque réponse juste rapporte 1 point.
Chaque réponse fausse enlève 1 point.
L'absence de réponse n'enlève ni ne rapporte aucun point.*

Compléter le tableau donné sur la feuille de réponses par V ou F.

1°) La fonction $f: x \mapsto (x+1)^3 - x(x-1)(x-2)$ est une fonction polynôme du second degré.

2°) Pour tout réel x , on a : $\sqrt{4x^2} - \sqrt{9x^2} = -x$.

3°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - 2|x| \geq 0$ est $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

4°) Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sqrt{x} \leq x$.

5°) L'ensemble de définition de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ est $] -\infty; 3[$.

6°) Pour tout réel $x \geq 4$, on a : $|2 - \sqrt{x}| = \sqrt{x} - 2$.

7°) Pour tout réel x , on a : $x^2 - 3x + 5 > 0$.

8°) L'ensemble des solutions de l'équation $2|x-1| = 3$ est $\left\{\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	Total
Réponse									

II. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point)

Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.

1°) On considère la fonction $f: x \mapsto 1 - |x^2 - 3|$ définie sur \mathbb{R} .

- Déterminer l'image de $1 - \sqrt{2}$ par f .
- Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par f .
- Déterminer le(s) antécédent(s) de 1 par f .

2°) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} dont l'image d'un réel x est donnée par la valeur de y affichée en sortie par l'algorithme ci-contre.

a) Choisir parmi les expressions proposées ci-dessous celle qui correspond à l'expression de $g(x)$.

$-(|x|+1)^2$; $(|x|+1)^2$; $-(|x|-1)^2$; $(|x|-1)^2$

b) Déterminer le(s) antécédent(s) de $-\frac{4}{9}$ par g .

Variables : x et y , nombres réels

Entrée :
Saisir x

Traitement :

Si $x \geq 0$
alors y prend la valeur $-x^2 + 2x - 1$
Sinon
 y prend la valeur $-x^2 - 2x - 1$

FinSi

Sortie :
Afficher y

III. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 3 points ; c) 4 points)

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{2}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1°) Compléter le tableau fourni sur la feuille de réponses afin de déterminer les variations de f .

2°) Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on note \mathcal{C} la courbe représentative de f et D la droite d'équation $y = 3x - 10$.

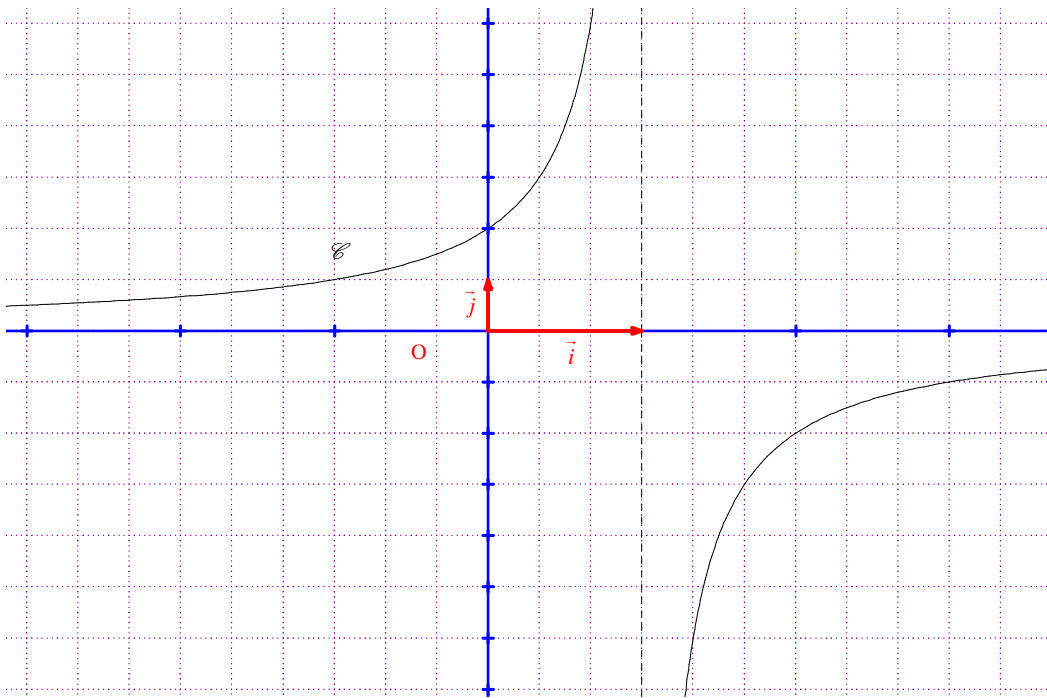
- a) Tracer D sur le graphique ci-après.
- b) Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection A et B de \mathcal{C} et de D (on prendra $x_A < x_B$).
On rédigera selon le modèle suivant (à recopier et compléter) :

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} et de D sont les solutions de l'équation (1).

On résout (1) dans

(1) est successivement équivalente à :

.....



c) Étudier par le calcul la position de \mathcal{C} par rapport à D .

On conclura l'étude selon le modèle suivant (à recopier et à compléter) :

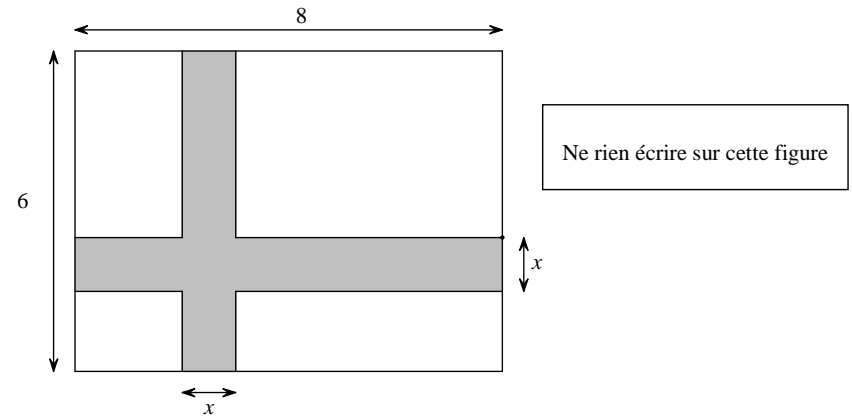
- \mathcal{C} est strictement au-dessus de D sur
- \mathcal{C} est strictement au-dessous de D sur
- \mathcal{C} et D sont sécantes aux points A et B.

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

On souhaite réaliser un drapeau rectangulaire, constitué d'une croix dont les bords sont parallèles aux côtés du rectangle (voir figure ci-après).

La longueur du drapeau est 8 m, sa largeur est de 6 m.

On cherche à déterminer la largeur x de la croix (en m) telle que l'aire de la croix soit égale à la moitié de celle de l'aire totale du drapeau.



1°) Démontrer que l'aire de la croix en m^2 est donnée par $\mathcal{A} = 14x - x^2$.
Donner seulement trois étapes de calcul sans introduire de points sur la figure.

2°) Déterminer la largeur de la croix qui convient pour réaliser ce drapeau.

V. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les points E et F définis par $4\overline{AE} = \overline{AB}$ et $\overline{AF} = 4\overline{AC}$.

Aucune figure n'est demandée.

1°) Exprimer \overline{BF} en fonction de \overline{AB} et de \overline{AC} .

2°) Exprimer \overline{CE} en fonction de \overline{AB} et de \overline{AC} .

3°) Démontrer que les droites (CE) et (BF) sont parallèles.

VI. (8 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . À tout réel m on associe la droite D_m d'équation cartésienne $(m+1)x - (2m-2)y - m + 3 = 0$.

1°) Déterminer, si elle(s) existe(nt), la (les) valeur(s) de m pour laquelle la droite D_m passe par le point A(-2; 2) ?
Même question avec le point B(3; 1).

2°) Démontrer que toutes les droites D_m passent par le point K(-1; -1).

3°) Déterminer, si elle(s) existe(nt), la (les) valeur(s) de m pour laquelle la droite D_m est parallèle à l'axe des abscisses.

4°) Déterminer, si elle(s) existe(nt), la (les) valeur(s) de m pour laquelle la droite D_m est parallèle à la droite Δ d'équation cartésienne $3x - 5y - 2 = 0$.

5°) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de la droite D_4 et de Δ .

Corrigé du contrôle du 18-11-2015

I.

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Réponse	V	F	F	F	V	V	V	F

Justifications :

1°) La fonction $f: x \mapsto (x+1)^3 - x(x-1)(x-2)$ est une fonction polynôme du second degré.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= (x+1)^3 - x(x-1)(x-2) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x(x^2 - 3x + 2) \quad (\text{on utilise l'identité remarquable cubique : } (a+b)^3 = \dots) \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 2x \\ &= 6x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

2°) Pour tout réel x , on a : $\sqrt{4x^2} - \sqrt{9x^2} = -x$.

$$\text{Posons } A = \sqrt{4x^2} - \sqrt{9x^2}.$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad A &= \sqrt{4} \times \sqrt{x^2} - \sqrt{9} \times \sqrt{x^2} \\ &= 2 \times |x| - 3 \times |x| \\ &= -|x| \end{aligned}$$

Il y a un moyen de vérifier sur la calculatrice en traçant la représentation graphique de la fonction

$$f: x \mapsto \sqrt{4x^2} - \sqrt{9x^2}.$$

3°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - 2|x| \geq 0$ est $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

L'inéquation $1 - 2|x| \geq 0$ est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned} |x| &\leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} &\leq x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4°) Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\sqrt{x} \leq x$.

On prend le contre-exemple $x = 0,25$.

On a : $\sqrt{0,25} = 0,5$. Or $0,5 > 0,25$ donc l'inégalité $\sqrt{x} \leq x$ est fautive pour $x = 0,25$.

Tout réel de l'intervalle $]0; 1[$ fournit un contre-exemple.

5°) L'ensemble de définition de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ est $] -\infty; 3[$.

$$f(x) \text{ existe si et seulement si } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \sqrt{3-x} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x \leq 3 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} x < 3 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

si et seulement si $x < 3$

6°) Pour tout réel $x \geq 4$, on a : $|2 - \sqrt{x}| = \sqrt{x} - 2$.

On doit étudier le signe de $2 - \sqrt{x}$ pour $x \geq 4$.

L'inégalité $x \geq 4$ entraîne $\sqrt{x} \geq \sqrt{4}$ (croissance de la fonction « racine carrée ») soit $\sqrt{x} \geq 2$.

On a onc $2 - \sqrt{x} \leq 0$.

La quantité $2 - \sqrt{x}$ est donc négative ou nulle pour $x \geq 4$.

Or la valeur absolue d'un réel négatif ou nul est égal à son opposé.

On en déduit que $\forall x \in [4; +\infty[\quad |2 - \sqrt{x}| = -(2 - \sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2$.

7°) Pour tout réel x , on a : $x^2 - 3x + 5 > 0$.

Le discriminant du polynôme $x^2 - 3x + 5$ est égal à $9 - 20 = -11$.

Comme il est strictement négatif le polynôme est toujours du signe du coefficient de x^2 , c'est-à-dire strictement positif.

On vérifie facilement ce résultat en traçant sur l'écran de la calculatrice graphique la représentation graphique de la fonction $f: x \mapsto x^2 - 3x + 5$.

8°) L'ensemble des solutions de l'équation $2|x-1| = 3$ est $\left\{\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

L'équation $2|x-1|=3$ est successivement équivalente à :

$$|x-1| = \frac{3}{2}$$

$$x-1 = \frac{3}{2} \text{ ou } x-1 = -\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

II.

1°)

$1-2\sqrt{2}$	$2; -2; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$
---------------	------------------------------	---------------------------

• Déterminer l'image de $1-\sqrt{2}$ par f .

$$\begin{aligned} f(1-\sqrt{2}) &= 1 - \left| (1-\sqrt{2})^2 - 3 \right| \\ &= 1 - \left| 1 + 2 - 2\sqrt{2} - 3 \right| \\ &= 1 - \left| \cancel{1} - 2\sqrt{2} - \cancel{2} \right| \\ &= 1 - \left| -2\sqrt{2} \right| \\ &= 1 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

• On cherche le(s) antécédent(s) de 0 par f .

Pour cela, l'équation $f(x) = 0$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$1 - |x^2 - 3| = 0$$

$$|x^2 - 3| = 1$$

$$x^2 - 3 = 1 \text{ ou } x^2 - 3 = -1$$

$$x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 2$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Les antécédents de 0 par f sont $2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

• On cherche le(s) antécédent(s) de 1 par f .

Pour cela, on résout l'équation $f(x) = 1$ (2).

(2) est successivement équivalente à :

$$1 - |x^2 - 3| = 1$$

$$|x^2 - 3| = 0$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

Les antécédents de 1 par f sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

2°)

a)

$$g(x) = -(|x-1|)^2$$

Explication :

Si $x \geq 0$, alors $g(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$.

Si $x < 0$, alors $g(x) = -x^2 - 2x - 1 = -(x+1)^2 = -(-x-1)^2$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = -(|x-1|)^2$.

On peut programmer l'algorithme sur calculatrice, bien que ce n'était pas demandé, et rentrer la fonction $x \mapsto -(|x-1|)^2$ puis comparer les résultats obtenus par l'algorithme pour différentes valeurs de x .

b)

On cherche le(s) antécédent(s) de $-\frac{4}{9}$ par g .

1^{ère} méthode :

On résout l'équation $g(x) = -\frac{4}{9}$ (3).

(3) est successivement équivalente à :

$$-(|x|-1)^2 = -\frac{4}{9}$$

$$(|x|-1)^2 = \frac{4}{9} \quad (\text{on ne développe surtout pas le premier membre})$$

$$|x|-1 = \frac{2}{3} \text{ ou } |x|-1 = -\frac{2}{3}$$

$$|x| = \frac{5}{3} \text{ ou } |x| = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = -\frac{5}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

Les antécédents de $-\frac{4}{9}$ par g sont $\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

2^e méthode :

On utilise l'algorithme en distinguant deux cas : $x \geq 0$ et $x < 0$.

III.

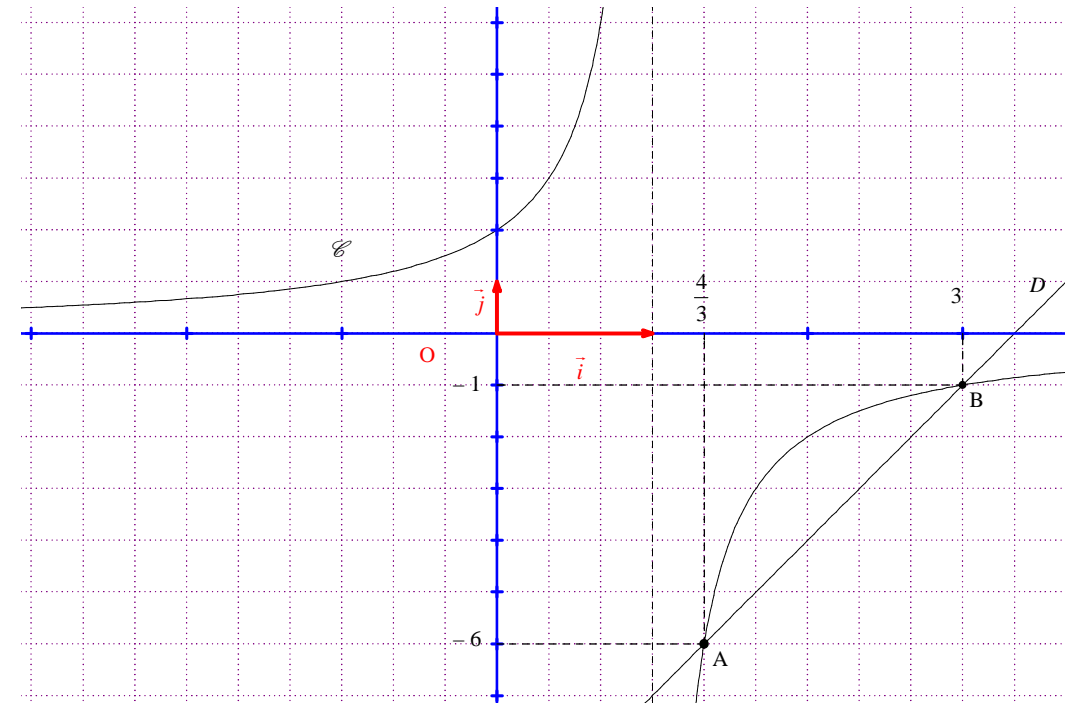
1°)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+		-
$\frac{1}{1-x}$	↗		↘
$f(x)$	↗		↘

On vérifie que les variations de f coïncident avec la courbe \mathcal{C} donnée dans l'énoncé à la question suivante.

2°)

a)



b)

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} et de D sont les solutions de l'équation $f(x) = 3x - 10$ (1).

On résout (1) dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{2}{1-x} = 3x - 10$$

$$2 = (3x - 10)(1 - x)$$

$$2 = 3x - 3x^2 - 10 + 10x$$

$$2 = -3x^2 - 10 + 13x$$

$$3x^2 - 13x + 12 = 0$$

Considérons le polynôme $3x^2 - 13x + 12$.

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 169 - 144 = 25$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans \mathbb{R} : $x_1 = \frac{13-5}{6} = \frac{4}{3}$ ou $x_2 = \frac{13+5}{6} = 3$.

3 et $\frac{4}{3}$ sont différents de 1 donc les solutions de l'équation (1) sont 3 et $\frac{4}{3}$.

Les points d'intersection A et B de \mathcal{C} et de D ont pour abscisses respectives 3 et $\frac{4}{3}$.

c)

Pour étudier la position de \mathcal{C} par rapport à D , on étudie le signe de $g(x) = f(x) - (3x - 10)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad g(x) &= \frac{2}{1-x} - (3x-10) \\ &= \frac{2 - (1-x)(3x-10)}{1-x} \\ &= \frac{3x^2 - 13x + 12}{1-x} \quad (\text{résultat final}) \end{aligned}$$

On dresse un tableau de signes.

x	$-\infty$	1	$\frac{4}{3}$	3	$+\infty$
SGN de $3x^2 - 13x + 12$	+		+ 0 ^{num}	- 0 ^{num}	+
SGN de $1-x$	+	0 ^{déno}	-	-	-
SGN de $\frac{3x^2 - 13x + 12}{1-x}$	+		- 0 ^{num}	+ 0 ^{num}	-

Ainsi,

$$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]\frac{4}{3}; 3[\quad g(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; \frac{4}{3}[\cup]3; +\infty[\quad g(x) < 0$$

$$g(x) = 0 \quad \text{pour } x = \frac{4}{3} \text{ ou } x = 3$$

On en conclut que :

- \mathcal{C} est strictement au-dessus de D sur $]-\infty; 1[\cup]\frac{4}{3}; 3[$;

- \mathcal{C} est strictement au-dessous de D sur $]1; \frac{4}{3}[\cup]3; +\infty[$;

- \mathcal{C} et D sont sécantes aux points A et B.

On vérifie que ces résultats sont en accord avec ceux du graphique.

IV.

1°)

- 1^{ère} méthode :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{aire du rectangle horizontal} + \text{aire du rectangle vertical} - \text{aire du carré central} \\ &= 6 \times x + 8 \times x - x^2 \\ &= 14x - x^2 \end{aligned}$$

- 2^e méthode :

La croix détermine dans le « grand » rectangle 4 « petits » rectangles.

En mettant bord à bord ces 4 rectangles, on peut former un rectangle de dimensions $8-x$ et $6-x$ (faire une figure).

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 48 - (6-x)(8-x) \\ &= 48 - (48 - 14x + x^2) \\ &= 14x - x^2 \end{aligned}$$

2°) D'après l'énoncé, on doit avoir $\mathcal{A} = \frac{\text{aire du drapeau}}{2}$ (1).

(1) est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned} 14x - x^2 &= \frac{6 \times 8}{2} \\ 14x - x^2 &= 24 \\ 14x - x^2 - 24 &= 0 \\ -x^2 + 14x - 24 &= 0 \quad (1') \end{aligned}$$

On calcule le discriminant réduit de (1') :

$$\Delta' = 25$$

$\Delta' > 0$ donc l'équation admet 2 racines distinctes dans \mathbb{R} : 2 et 12.

On pouvait utiliser le programme « second degré » de la calculatrice.

Or d'après les contraintes de l'énoncé, $x \in]0; 6[$, donc la seule solution que l'on peut retenir est 2.

Donc la largeur de la croix doit être de 2 m.

V.

1°)

$$\overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AF} \text{ (relation de Chasles)}$$

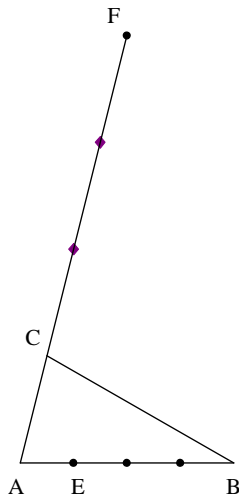
$$= -\overline{AB} + 4\overline{AC}$$

2°)

$$\text{On a } 4\overline{AE} = \overline{AB} \text{ donc } \overline{AE} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$

$$\overline{CE} = \overline{CA} + \overline{AE} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= -\overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AB}$$

3°) On observe que $\overline{BF} = -4\overline{CE}$. Donc les vecteurs \overline{BF} et \overline{CE} sont colinéaires.On en déduit que $(CE) // (BF)$.**VI.**

$$D_m : (m+1)x - (2m-2)y - m + 3 = 0$$

1°)

$$A \in D_m \text{ si et seulement si } (m+1) \times (-2) - (2m-2) \times 2 - m + 3 = 0$$

$$\text{si et seulement si } -2m - 2 - 4m + 4 - m + 3 = 0$$

$$\text{si et seulement si } m = \frac{5}{7}$$

$$B \in D_m \text{ si et seulement si } (m+1) \times 3 - (2m-2) \times 1 - m + 3 = 0$$

$$\text{si et seulement si } 3m + 3 - 2m + 2 - m + 3 = 0$$

$$\text{si et seulement si } 8 = 0 \text{ (impossible)}$$

Il n'existe pas de valeur de m pour laquelle la droite D_m passe par B.

2°)

$$\begin{aligned} (m+1) \times x_K - (2m-2) \times y_K - m + 3 &= (m+1) \times (-1) - (2m-2) \times (-1) - m + 3 \\ &= -(m+1) + (2m-2) - m + 3 \\ &= -m - 1 + 2m - 2 - m + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc K appartient à toutes les droites D_m .

3°)

On utilise la propriété du cours :

« La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $a = 0$ ».

$$D_m // (Ox) \text{ si et seulement si } m+1 = 0$$

$$\text{si et seulement si } m = -1$$

Autre méthode (maladroite) : On utilise les vecteurs directeurs.

4°)

1^{ère} méthode :

On utilise directement le résultat du cours sur le parallélisme (avec des droites d'équations cartésiennes $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$).

$$D_m // \Delta \text{ si et seulement si } \begin{vmatrix} 2m-2 & 5 \\ m+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{si et seulement si } (2m-2) \times 3 - (m+1) \times 5 = 0$$

$$\text{si et seulement si } 6m - 6 - 5m - 5 = 0$$

$$\text{si et seulement si } m = 11$$

2^e méthode :

On utilise les vecteurs directeurs.

La droite D_m a pour vecteur directeur $\vec{u}(2m-2; m+1)$.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{v}(5; 3)$.

$D_m // \Delta$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

$$\text{si et seulement si } \begin{vmatrix} 2m-2 & 5 \\ m+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{si et seulement si } 3(2m-2) - 5(m+1) = 0$$

$$\text{si et seulement si } m - 11 = 0$$

$$\text{si et seulement si } m = 11$$

Attention, un certain nombre d'élèves a « passé » l'équation cartésienne de la droite D_m en équation réduite $y = \dots$.

Outre le fait que cette méthode est très lourde, elle nécessite des précautions. En effet, la droite D_m n'admet une équation réduite que lorsqu'elle est non parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire lorsque $m \neq -1$.

5°)

D_4 a pour équation cartésienne $5x - 6y - 1 = 0$ (obtenue en remplaçant m par 4).

Δ a pour équation cartésienne $3x - 5y - 2 = 0$.

Le couple de coordonnées du point I est la solution du système $\begin{cases} 5x - 6y - 1 = 0 \\ 3x - 5y - 2 = 0 \end{cases}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

On peut le résoudre « à la main » (la méthode la plus simple ici est la substitution) ou si l'on est fainéant – ou plutôt astucieux – grâce à la calculatrice de collège Casio.

1^{ère} méthode :

On résout le système « à la main » en utilisant la méthode des multiplicateurs.

$$\begin{cases} 5x - 6y = 1 & \times 5 \\ 3x - 5y = 2 & \times (-6) \end{cases} \times 3$$

$$\begin{cases} 7x = -7 \\ 7y = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

I a donc pour coordonnées $(-1; -1)$.

On en déduit que I est confondu avec le point K.

2^e méthode :

On résout le système à l'aide de la calculatrice.

Pour résoudre le système à l'aide de la calculatrice, on doit d'abord réécrire le système sous la forme $\begin{cases} 5x - 6y = 1 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$.

On obtient $x = -1$ et $y = -1$.

Donc I $(-1; -1)$.