TS1

Contrôle du jeudi 12 novembre 2015 (3 heures)

Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé. Une feuille de réponses est jointe au sujet.

Partie commune (2 heures)

I. (4 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2+3=0$ (E_1) et $z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0$ (E_2).
On donnera les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectivement de (E_1) et (E_2) sans détailler les calculs.

2°) On considère le polynôme $P(z)=z^4-2\left(1+\sqrt{3}\right)z^3+2\left(4+\sqrt{3}\right)z^2-6\left(1+\sqrt{3}\right)z+15+6\sqrt{3}$ pour $z\in\mathbb{C}$.
Démontrer que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=\left(z^2+3\right)\left[z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right]$.
En déduire sans explication les racines de $P(z)$.

II. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points + 1 point)

Soit a un nombre réel fixé. Pour tout nombre complexe $z\neq a$, on pose $f(z)=\dfrac{\bar{z}-a}{a-z}$.

1°) Justifier que tous les réels différents de a ont la même image par f.

2°) Démontrer que pour tout nombre complexe $z\neq a$, on a : $f(\bar{z})=\dfrac{1}{f(z)}$.

3°) Soit z un nombre complexe distinct de a. On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels tels que $(x\,;y)\neq(a\,;0)$.
Démontrer que pour tout nombre complexe $z\neq a$, on a : $f(z)=\dfrac{y^2-(x-a)^2}{R}+2\mathrm{i}\dfrac{xy-ay}{R}$ avec $R=(x-a)^2+y^2$.

On effectuera le calcul en 5-6 étapes ; on commencera par écrire le dénominateur de $f(z)$ sous la forme $(a-x)-\mathrm{i}y$.

4°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$.
On note A le point d'affixe a.

Déterminer les ensembles E et F suivants :

- E est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel ;

- F est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

On ne rédigera complètement que la recherche de l'ensemble E en adoptant le modèle ci-dessous (ne rien écrire dans le cadre ; démarrer directement en écrivant « Soit M un point quelconque de P … »).

Pour l'ensemble F, on se contentera de donner la réponse.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z\neq a$.

On pose $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y sont des réels tels que $(x\,;y)\neq(a\,;0)$.

$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow f(z)\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

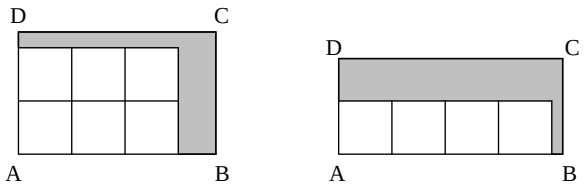
Conclure :

E est …… (ne pas parler du point M dans la conclusion)

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Une unité de longueur est fixée dans tout l'exercice.
On considère un rectangle ABCD de périmètre constant égal à 12. On pose $AB = x$ et $BC = z$.
On a : $0 \leqslant x \leqslant 6$ et la condition sur le périmètre permet d'établir aisément que $z = 6 - x$.
Dans ce rectangle, on range des carrés de côté 1 « bord à bord » de manière à former le plus grand rectangle contenu dans ABCD comme le montrent les deux figures ci-dessous.

On note f la fonction qui à tout réel $x \in [0\,;6]$ associe le nombre de carrés contenus dans ABCD.



Ne rien écrire sur les figures.

1°) Compléter sans justifier le tableau :

Valeur de x	0	1	2	1,9	2,01	3
Valeur de z						
Valeur de $f(x)$						

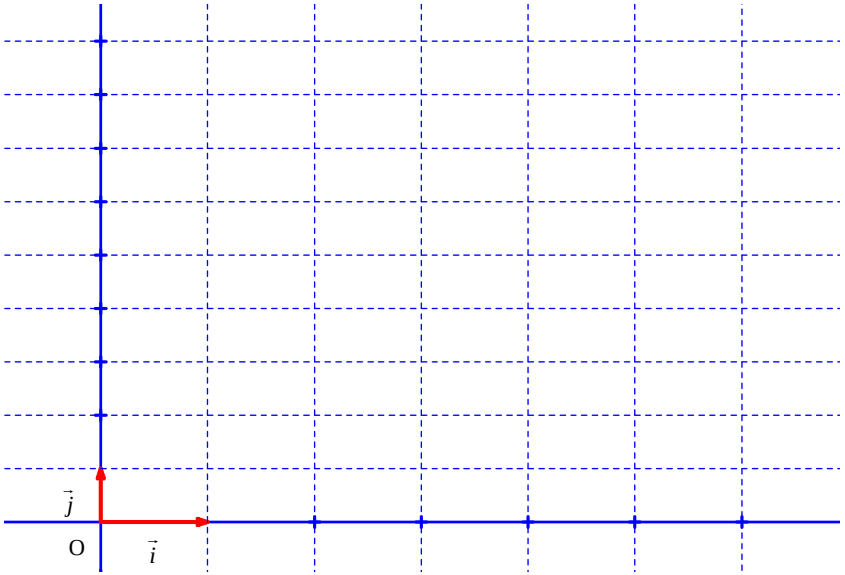
2°) Compléter sans justifier le tableau :

Encadrement de x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
Encadrement de z			
Valeur de $f(x)$			

3°) Tracer avec soin sur le graphique ci-contre la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0\,;6]$.

4°) **Bonus (1 point) :**

Exprimer sans justifier $f(x)$ en fonction de x.



IV. (7 points : partie A : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; partie B : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Partie A

On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x + 8$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Quel est le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$? On donnera une réponse rédigée en 3-4 lignes (une idée par ligne).

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.
On donnera une réponse rédigée en 4-5 lignes (une idée par ligne).

3°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur décimale approchée au millième par défaut de α.
On donnera la réponse sans explication.

4°) Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. On répondra sans expliquer en dressant un tableau de signes.

Partie B

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$. On détaillera le calcul en trois lignes.

2°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée au millième par défaut de $f(\alpha)$.
On donnera la réponse sans explication.

4°) **Question qui ne figurait pas dans le contrôle**

Démontrer que $f(\alpha)=\frac{3\alpha}{2}$.

Conseils donnés à l'oral

III.

2°) On attend bien la valeur de $f(x)$ (et non un encadrement de $f(x)$).

IV.

Dire que « g est continue sur … » et non « $g(x)$ est continue ».

Partie commune (2 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note :** …….. **/ 20**

I. (4 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 2 points)

1°)

$S_1 =$ …………………………………………	$S_2 =$ …………………………………………

2°)

……

……

……

……

……

……

Les racines de $P(z)$ sont ……………………………………………………………………………

II. (6 points)

1°) ……………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

2°) ……………………………………………………………………………………………………

……

……

3°) ……………………………………………………………………………………………………

……

……

4°) ……………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (3 points)

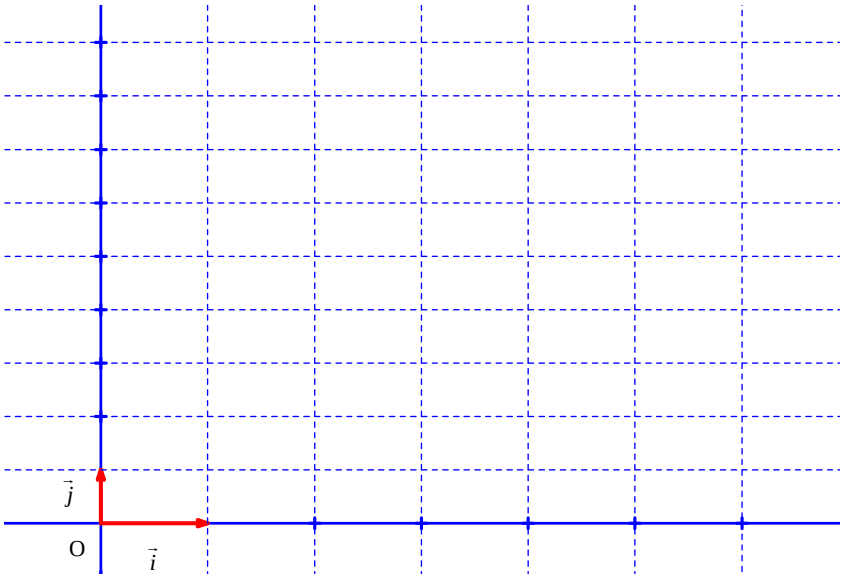
1°)

Valeur de x	0	1	2	1,9	2,01	3
Valeur de z						
Valeur de $f(x)$						

2°)

Encadrement de x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
Encadrement de z			
Valeur de $f(x)$			

3°)



4°) (1 point bonus)

IV. (7 points)

Partie A

1°) ……

……

……

2°) ……

……

……

……

3°) La valeur décimale approchée au millième par défaut de α est égale à …… .

4°)

Partie B

1°) ……

……

……

2°)

3°) La valeur décimale approchée au millième par défaut de $f(\alpha)$ est égale à …… .

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Prénom et nom : ……..…… **Note :** …….. **/ 20**

I. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) 2 points)

Marc possède 200 €. Il décide de dépenser chaque mois la moitié de ses économies du mois précédent car, pour compenser, il travaille et économise 180 € par mois. Il espère ainsi pouvoir dépenser plus tout en augmentant ses économies.
On pose u_n le montant de ses économies en euros au bout de *n* mois. Ainsi, $u_0 = 200$.

1°) Exprimer sans justifier u_{n+1} en fonction de u_n.

……..

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 360$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

……..

……..

……..

……..

……..

En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

……..

……..

……..

……..

……..

3°) Plus généralement, en notant C le montant initial des économies de Marc en euros, exprimer u_n en fonction de *n* et de C.

……..

……..

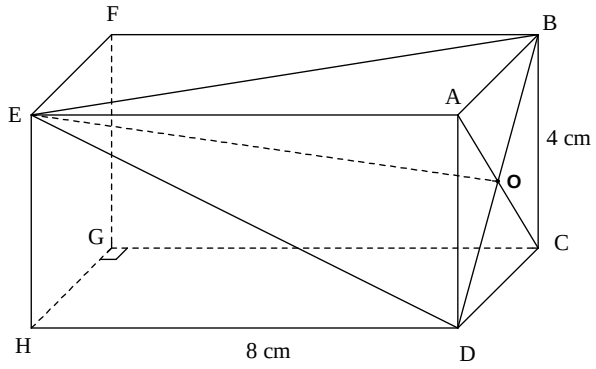
……..

……..

……..

II. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) 2 points)

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que ABCD soit un carré de côté 4 cm et tel que $AE = 8$ cm.
On note O le centre du carré ABCD.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Calculer le volume de la pyramide EABD.

……..

……..

……..

……..

2°) Quelle est la nature du triangle EDB ? Justifier.
Calculer EO.

……..

……..

……..

……..

……..

3°) Construire le triangle EBD en vraie grandeur.

III. (6 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 - 3x + b}{x - 1}$ où a et b sont deux réels.

Déterminer a et b sachant que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet au point A d'abscisse – 1 une tangente horizontale et au point B d'abscisse 4 une tangente parallèle à la droite Δ d'équation cartésienne $5x - 9y + 1 = 0$.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Prénom et nom : ……..…… **Note :** …….. **/ 20**

Dans les exercices **I** à **V**, aucune justification n'est demandée.

I. (4 points)

Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $5xy - y^2 = 49$.
On donnera uniquement les résultats (sans égalité). Le détail de la recherche n'est pas demandé.

…….

II. (4 points : 1 point par réponse)

On écrit tous les termes d'une suite (u_n) dans un tableau de 43 colonnes et d'un nombre illimité de lignes.
On commence par la première ligne, de gauche à droite.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	…
L_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8		
L_2										
L_3										
…										

1°) Dans quelle ligne et quelle colonne se trouve u_{99} ? u_{738} ? u_{2015} ?

u_{99} se trouve dans la ligne ….. et dans colonne …...

u_{738} se trouve dans la ligne ….. et dans colonne …...

u_{2015} se trouve dans la ligne ….. et dans colonne …...

2°) Le terme u_m se trouve dans la ligne L_i et dans la colonne C_j.
Déterminer une relation entre *i*, *j* et *m*. Aucune explication n'est demandée.

……. (une seule égalité)

III. (3 points)

On divise un entier naturel *n* par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98.
Quel est cet entier naturel *n* ?

…….

IV. (3 points)

Déterminer tous les entiers naturels qui dans la division euclidienne par 7 donnent un quotient égal au triple du reste.
Aucune justification n'est demandée.

…….

V. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 5 points)

1°) Donner sans expliquer la liste des diviseurs positifs de 102 dans l'ordre croissant.

……...

2°) Déterminer tous les entiers naturels *m* tels que dans la division euclidienne de 135 par *m*, le reste est 33.

On rédigera la solution au verso.

Aide pour la démarche et la rédaction de cette question :

On rédigera la solution en deux parties.

1ère partie : recherche des valeurs possibles de *m*

Soit *m* un entier naturel tel que dans la division euclidienne de 135 par *m*, le reste est 33.

↕ phase de recherche à rédiger correctement

Les valeurs possibles de *m* sont …… .

2e partie : vérification des valeurs trouvées précédemment

On pourra présenter en tableau.

Enfin, on fera une conclusion claire pour tout l'exercice.

Corrigé de la partie commune (2 heures)

I.

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2+3=0$ (E_1) et $z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0$ (E_2).

On donnera les ensembles de solutions S_1 et S_2 respectivement de (E_1) et (E_2) sans détailler les calculs.

$S_1=\left\{\mathrm{i}\sqrt{3}\,;-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$	$S_2=\left\{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\,;1+\sqrt{3}-\mathrm{i}\right\}$

• Résolution de (E_1) :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_1) &\Leftrightarrow z^2=-3\\ &\Leftrightarrow z=\mathrm{i}\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z=-\mathrm{i}\sqrt{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E_1) est $S_1=\left\{\mathrm{i}\sqrt{3}\,;-\mathrm{i}\sqrt{3}\right\}$.

• Résolution de (E_2) :

(E_2) est une équation du second degré à coefficients réels.

On calcule son discriminant réduit est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta' &= \left(1+\sqrt{3}\right)^2-1\times\left(5+2\sqrt{3}\right)\\ &=4+2\sqrt{3}-5-2\sqrt{3}\\ &=-1\end{aligned}$$

$\Delta'<0$ donc (E_2) admet deux racines distinctes conjuguées dans $\mathbb{C}$: $1+\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $1+\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

L'ensemble des solutions de (E_2) est $S_2=\left\{1+\sqrt{3}+\mathrm{i}\,;1+\sqrt{3}-\mathrm{i}\right\}$.

2°) On considère le polynôme $P(z)=z^4-2\left(1+\sqrt{3}\right)z^3+2\left(4+\sqrt{3}\right)z^2-6\left(1+\sqrt{3}\right)z+15+6\sqrt{3}$ pour $z\in\mathbb{C}$.

Démontrer que pour tout nombre complexe z on a : $P(z)=\left(z^2+3\right)\left[z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right]$.

> Beaucoup d'élèves sont partis de
> $P(z)=\left(z^2+3\right)\left[z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right]$, énorme faute !!!
> Il fallait nommer le second membre et le développer pour arriver à $P(z)$.

On pose $Q(z)=\left(z^2+3\right)\left[z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right]$.

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C}\quad Q(z) &= z^4-2\left(1+\sqrt{3}\right)z^3+\left(5+2\sqrt{3}\right)z^2+3z^2-6\left(1+\sqrt{3}\right)z+15+6\sqrt{3}\\ &=z^4-2\left(1+\sqrt{3}\right)z^3+\left(8+2\sqrt{3}\right)z^2-6\left(1+\sqrt{3}\right)z+15+6\sqrt{3}\\ &=z^4-2\left(1+\sqrt{3}\right)z^3+2\left(4+\sqrt{3}\right)z^2-6\left(1+\sqrt{3}\right)z+15+6\sqrt{3}\\ &=P(z)\end{aligned}$$

Donc $\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=\left(z^2+3\right)\left[z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right]$.

En déduire sans explication les racines de $P(z)$.

> Compte tenu de sa facilité, cette question était notée sur 0 point.

Les racines de $P(z)$ sont $\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $1+\sqrt{3}-\mathrm{i}$, $1+\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

> *Explication :*
>
> $$\begin{aligned}P(z)=0 &\Leftrightarrow \left(z^2+3\right)\left[z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right]=0\\ &\Leftrightarrow z^2+3=0 \text{ ou } z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}=0\end{aligned}$$
>
> L'ensembles des racines de $P(z)$ est la réunion des ensembles S_1 et S_2.

II.

Soit a un nombre réel fixé. Pour tout nombre complexe $z\neq a$, on pose $f(z)=\dfrac{\bar{z}-a}{a-z}$.

1°) Justifier que tous les réels différents de a ont la même image par f.

$$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{R}\setminus\{a\}\quad f(z) &= \frac{\bar{z}-a}{a-z}\\ &=\frac{z-a}{a-z} \qquad (\bar{z}=z \text{ car } z \text{ est réel})\\ &=-1\end{aligned}$$

– 1 est une constante donc tous les réels différents de a ont la même image par f.

2°) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq a$, on a : $f\left(\overline{z}\right) = \dfrac{1}{f(z)}$.

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{ a \} \quad f\left(\overline{z}\right) = \frac{\overline{\overline{z} - a}}{a - \overline{z}}$$

$$= \frac{z - a}{a - \overline{z}}$$

$$= \frac{a - z}{\overline{z} - a} \quad \text{(multiplication par – 1 du numérateur et du dénominateur)}$$

$$= \frac{1}{f(z)}$$

3°) Soit z un nombre complexe distinct de a. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels tels que $(x\,;\,y) \neq (a\,;\,0)$.

Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq a$, on a : $f(z) = \dfrac{y^2 - (x-a)^2}{R} + 2\mathrm{i}\dfrac{xy - ay}{R}$ avec $R = (x-a)^2 + y^2$.

On effectuera le calcul en 5-6 étapes ; on commencera par écrire le dénominateur de $f(z)$ sous la forme $(a - x) - \mathrm{i}y$.

Il n'y a pas besoin de dire que $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ car c'est une évidence.
Je fais cette remarque car j'ai trouvé ça dans plusieurs copies !

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{ a \} \quad f(z) = \frac{x - \mathrm{i}y - a}{(a - x) - \mathrm{i}y}$$

$$= \frac{(x-a) + \mathrm{i}y}{(a-x) - \mathrm{i}y} \quad \text{(il est indispensable d'écrire le numérateur sous la forme } (x-a) + \mathrm{i}y\text{)}$$

$$= \frac{\left[(x-a) - \mathrm{i}y\right]\left[(a-x) + \mathrm{i}y\right]}{\left[(a-x) - \mathrm{i}y\right]\left[(a-x) + \mathrm{i}y\right]}$$

$$= \frac{(x-a)(a-x) - \mathrm{i}^2 y^2 + \mathrm{i}y(x-a) - \mathrm{i}y(a-x)}{(a-x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{-(x-a)^2 + y^2 + \mathrm{i}\left[y(x-a) - y(a-x)\right]}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$= \frac{y^2 - (x-a)^2 + \mathrm{i}(yx - ay - ay + yx)}{(a-x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{y^2 - (x-a)^2 + \mathrm{i}(2xy - 2ay)}{(a-x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{y^2 - (x-a)^2 + 2\mathrm{i}(xy - ay)}{(a-x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{y^2 - (x-a)^2}{R} + 2\mathrm{i}\frac{xy - ay}{R} \quad \text{avec} \quad R = (x-a)^2 + y^2$$

4°) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A le point d'affixe a.

Déterminer les ensembles E et F suivants :

- E est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel ;

- F est l'ensemble des points M de P d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

On ne rédigera complètement que la recherche de l'ensemble E en adoptant le modèle ci-dessous (ne rien écrire dans le cadre ; démarrer directement en écrivant « Soit M un point quelconque de P … »).

Pour l'ensemble F, on se contentera de donner la réponse.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq a$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels tels que $(x\,;y) \neq (a\,;0)$.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Conclure :

E est …… (ne pas parler du point M dans la conclusion)

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq a$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des réels tels que $(x\,;y) \neq (a\,;0)$.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow f(z) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im} f(z) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(xy - ay)}{R} = 0$

$\Leftrightarrow xy - ay = 0$ (on a $R \neq 0$ car $(x\,;y) \neq (a\,;0)$)

$\Leftrightarrow y(x-a) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x - a = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ou $x = a$

Donc l'ensemble E est la réunion des droites d'équations $y = 0$ et $x = a$ privée du point A (le point A est défini dans l'énoncé comme ayant pour affixe a).
En effet, on s'aperçoit aisément que le point A appartient à chacune des deux droites d'équations $y = 0$ et $x = a$.
Il est possible éventuellement de faire un graphique.

Même démarche pour l'ensemble F.

L'ensemble F est la réunion des droites d'équations $x - y - a = 0$ et $x + y - a = 0$ privée du point A d'affixe a.

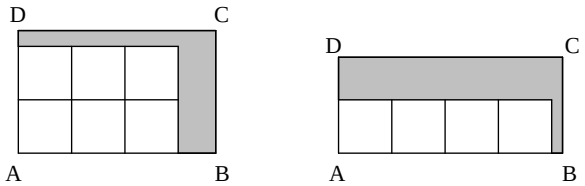
Voici quelques exemples de conclusions que j'ai trouvées dans des copies :

- Donc E est un ensemble vide.
- Donc E n'existe pas.
- F est inexistant, il ne contient aucun point.
- E est donc inexistant.
- F est la réunion des droites d'équations $y = x - a$ et $y = a - x$ dépourvues du point A d'abscisse a.
- Donc E n'existe pas. De même, F n'existe pas si $x \neq a$ et $y \neq 0$.
- E est l'ensemble correspondant à la droite d'équation $x = a$.

III.

Une unité de longueur est fixée dans tout l'exercice.
On considère un rectangle ABCD de périmètre constant égal à 12. On pose $\mathrm{AB} = x$ et $\mathrm{BC} = z$.
On a : $0 \leqslant x \leqslant 6$ et la condition sur le périmètre permet d'établir aisément que $z = 6 - x$.
Dans ce rectangle, on range des carrés de côté 1 « bord à bord » de manière à former le plus grand rectangle contenu dans ABCD comme le montrent les deux figures ci-dessous.

On note f la fonction qui à tout réel $x \in [0\,;6]$ associe le nombre de carrés contenus dans ABCD.



Ne rien écrire sur les figures.

1°) Compléter sans justifier le tableau :

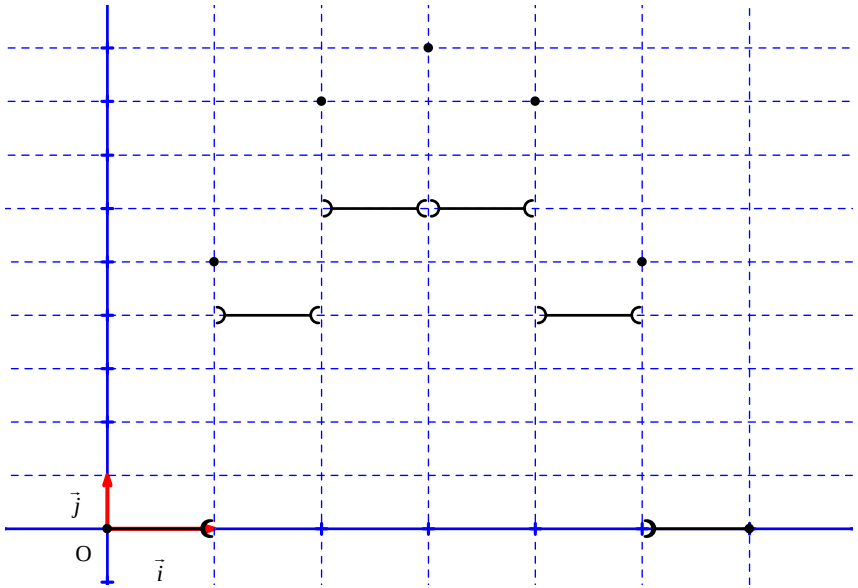
Valeur de x	0	1	2	1,9	2,01	3
Valeur de z	6	5	4	4,1	3,99	3
Valeur de $f(x)$	0	5	8	4	6	9

Il fallait faire des figures pour remplir les tableaux sans se tromper.

2°) Compléter sans justifier le tableau :

Encadrement de x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
Encadrement de z	$5 < z < 6$	$4 < z < 5$	$3 < z < 4$
Valeur de $f(x)$	0	4	6

3°) Tracer avec soin sur le graphique ci-contre la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0\,;6]$.



On fait une étude similaire à celle effectuée dans les questions 1°) et 2°) sur l'intervalle $[3\,;6]$.
La fonction f est une fonction constante par intervalles sur l'intervalle $[0\,;6]$.

4°) **Bonus :**

Exprimer sans justifier $f(x)$ en fonction de x.

On utilise la partie entière.

On a : $f(x) = \mathrm{E}(x) \times \mathrm{E}(z)$ donc $f(x) = \mathrm{E}(x) \times \mathrm{E}(6-x)$.

Cette expression permet de retrouver tous les résultats précédents, notamment la représentation graphique.

IV.

Partie A

On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x + 8$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Quel est le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$? On donnera une réponse rédigée en 3-4 lignes (une idée par ligne).

1ère méthode :

g est une fonction polynôme de degré 3, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2 + 3$
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) > 0$.
Donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2e méthode :

g est la somme de la fonction « cube » $x \mapsto x^3$ et de la fonction affine $x \mapsto 3x + 8$, toutes deux strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.
On donnera une réponse rédigée en 4-5 lignes (une idée par ligne).

(C_1) : La fonction g est continue sur l'intervalle $[-2\,;-1]$.
(C_2) : La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,;-1]$.
(C_3) : $g(-2) = -6$ et $g(-1) = 4$ d'où $0 \in [g(-2)\,;g(-1)]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.

3°) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur décimale approchée au millième par défaut de α.
On donnera la réponse sans explication.

La valeur décimale approchée au millième par défaut de α est égale à – 1,513.

On utilise la calculatrice.

1ère méthode :
On trace la courbe de la fonction g.
On obtient $\alpha = -1{,}51274\ldots$.
On a donc $-1{,}513 < \alpha < -1{,}512$.

2e méthode : On utilise l'application de résolution des équations polynomiales (g est une fonction polynôme de degré 3).

Les deux donnent évidemment la même valeur.

Grâce à la formule de Cardan, on obtient la valeur exacte de α : $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{17}+4} + \sqrt[3]{\sqrt{17}-4}$.

4°) Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. On répondra sans expliquer en dressant un tableau de signes.

La fonction g étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(\alpha)=0$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$. On détaillera le calcul en trois lignes.

f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{3x^2 \times (x^2+1) - (x^3-4) \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x\left[3x \times (x^2+1) - 2(x^3-4)\right]}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x \times g(x)}{(x^2+1)^2}$$

2°) Faire un tableau comprenant l'étude détaillée du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
Signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

3°) Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée au millième par défaut de $f(\alpha)$.
On donnera la réponse sans explication.

La valeur décimale approchée au millième par défaut de $f(\alpha)$ est égale à – 2,269.

> Une mauvaise méthode consiste à remplacer x par – 1,513 dans l'expression de $f(x)$.
> Cela de ne donne pas une approximation très précise de $f(\alpha)$.

Explication :

On étudie le maximum de f sur l'intervalle $[-3\,;0]$ puis sur $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (on sélectionne 4 : maximum).

On place la petite croix avant puis après.

En effet, $f(\alpha) = -2,26911...$ donc $-2,269 < f(\alpha) < -2,268$.

On trouve $\alpha = -1,51274...$ et $f(\alpha) = -2,26911...$.

4°) On a : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3-4}{\alpha^2+1}$.

Or on sait que $g(\alpha)=0$ c'est-à-dire que $\alpha^3+3\alpha+8=0$.

Par suite, on a : $\alpha^3 = -3\alpha - 8$.

Pour utiliser cette égalité dans le calcul de $f(\alpha)$, nous allons transformer le quotient en multipliant le numérateur et le dénominateur par α.

Ainsi, on peut écrire $f(\alpha)=\dfrac{\alpha\times(\alpha^3-4)}{\alpha\times(\alpha^2+1)}$. Nous allons développer ensuite le dénominateur mais pas le numérateur

de sorte que l'on obtient : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha\times(\alpha^3-4)}{\alpha^3+\alpha}$.

Ensuite, nous allons remplacer α^3 par $-3\alpha-8$.

On obtient alors $f(\alpha)=\dfrac{\alpha\times(-3\alpha-8-4)}{-3\alpha-8+\alpha}$.

On achève ensuite le « calcul » :

$$\begin{aligned}
f(\alpha)&=\frac{\alpha\times(-3\alpha-12)}{-2\alpha-8}\\
&=\frac{\alpha\times(3\alpha+12)}{2\alpha+8}\\
&=\frac{3\alpha\times\cancel{(\alpha+4)}}{2\times\cancel{(\alpha+4)}}\\
&=\frac{3\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Variante pour la transformation du dénominateur :

On a : $\alpha^3=-3\alpha-8$ d'où $\alpha^2=\dfrac{-3\alpha-8}{\alpha}$.

On obtient alors :

$$\alpha^2+1=\frac{-3\alpha-8}{\alpha}+1$$

$$\alpha^2+1=\frac{-2\alpha-8}{\alpha}$$

$$\alpha^2+1=\frac{-2(\alpha+4)}{\alpha}$$

On achève ensuite le calcul.

Complément sur la valeur exacte de α :

L'équation $x^3+x-3=0$ est du type $x^3+px+q=0$ avec $p=3$ et $q=8$.

Nous allons admettre le résultat suivant :

Si $4p^3+27q^2>0$, alors l'équation $x^3+px+q=0$ admet une unique racine réelle

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\quad\text{(formule de Cardan).}$$

$\sqrt[3]{x}$ désigne la racine cubique du réel x c'est-à-dire le réel dont le cube est égal à x.
On peut l'obtenir grâce à la commande de la calculatrice (sur calculatrice TI 83, appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$ puis choisir MATH 4 : $\sqrt[3]{\ }$ ( ).

Nous allons appliquer ce résultat à notre équation.

$$\begin{aligned}
\Delta&=4p^3+27q^2\\
&=4\times3^3+27\times8^2\\
&=108+1728\\
&=1836
\end{aligned}$$

$\Delta>0$ donc on retrouve que l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est donnée par : $\alpha=\sqrt[3]{-\frac{8}{2}+\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{8}{2}-\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{3}\right)^3}}$ soit

$\alpha=\sqrt[3]{-4+\sqrt{17}}+\sqrt[3]{-4-\sqrt{17}}$.

Corrigé de la partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

I.

Marc possède 200 €. Il décide de dépenser chaque mois la moitié de ses économies du mois précédent car, pour compenser, il travaille et économise 180 € par mois. Il espère ainsi pouvoir dépenser plus tout en augmentant ses économies.
On pose u_n le montant de ses économies en euros au bout de *n* mois. Ainsi, $u_0 = 200$.

1°) Exprimer sans justifier u_{n+1} en fonction de u_n.

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 180$$

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 360$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 360 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 180 - 360 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 180 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 360) \\ &= \frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 360 = 200 - 360 = -160$.

En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (formule de l'expression explicite du terme général d'une suite géométrique : $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$)

On peut aussi écrire : $v_n = -\frac{160}{2^n}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 360 = -160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 360 - 160 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On peut aussi écrire : $u_n = 360 - \frac{160}{2^n}$.

3°) Plus généralement, en notant C le montant initial des économies de Marc en euros, exprimer u_n en fonction de *n* et de C.

On reprend la suite (v_n) considérée dans la question précédente.
La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \mathrm{C} - 360$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (\mathrm{C} - 360) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

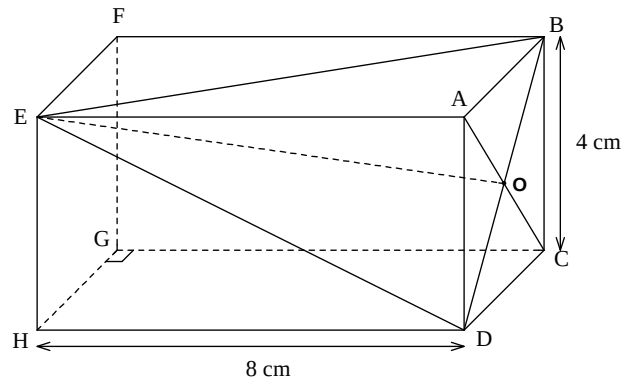
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 360 = (\mathrm{C} - 360) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 360 + (\mathrm{C} - 160) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On peut aussi écrire : $u_n = 360 + \frac{360 - \mathrm{C}}{2^n}$.

II.

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que ABCD soit un carré de côté 4 cm et tel que $\mathrm{AE} = 8$ cm.
On note O le centre du carré ABCD.



Ne rien écrire sur la figure.

1°) Calculer le volume de la pyramide EABD.

1ère méthode : bonne méthode

$$\mathcal{A}_{\text{ABD}} = \frac{\text{AB} \times \text{AD}}{2} = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \text{ cm}^2\text{eee}$$

2e méthode : maladroite

Dans le triangle ABD, la hauteur issue de A est $[\text{AO}]$.

$\text{AO} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ (moitié de la longueur de la diagonale)

$\text{BD} = 4\sqrt{2}$ (diagonale)

$$\mathcal{A}_{\text{ABD}} = \frac{\text{BD} \times \text{AO}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{V}_{\text{EABD}} = \frac{1}{3} \times \text{EA} \times \mathcal{A}_{\text{ABD}} = \frac{1}{3} \times 8^2 = \frac{64}{3} \text{ cm}^3$$

2°) Quelle est la nature du triangle EDB ? Justifier.
Calculer EO.

EABF et EADH sont deux rectangles de même longueur et de même largeur donc leurs diagonales ont la même longueur.
$\text{EB} = \text{ED}$ donc EBD est un triangle isocèle.
O est le milieu de $[\text{BD}]$ donc, dans le triangle EBD, (EO) est une médiane, et comme ce triangle est isocèle en E, alors (EO) est aussi une hauteur.
D'où : $(\text{BD}) \perp (\text{EO})$.
Le triangle EOD est donc rectangle en O.

1ère méthode :

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EAD rectangle en A, on a : $\text{ED}^2 = \text{EA}^2 + \text{AD}^2 = 64 + 16 = 80$

D'autre part, on a : $\text{OD} = \frac{1}{2}\text{BD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

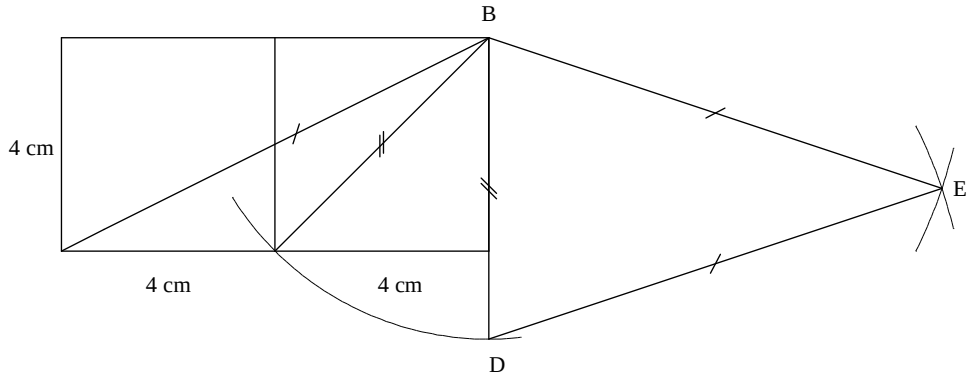
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EOD, on a : $\text{ED}^2 = \text{EO}^2 + \text{OD}^2$.
D'où : $\text{EO} = \sqrt{\text{ED}^2 - \text{OD}^2} = \sqrt{80 - 8} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

2e méthode :

Dans le triangle EAD rectangle en A, on a :
$\text{EO}^2 = \text{EA}^2 + \text{OA}^2$
$\text{EO}^2 = 8^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$
$\text{EO}^2 = 64 + 8$
$\text{EO} = 36 \times 2$
$\text{EO} = 6\sqrt{2}$ cm

3°) Construire le triangle EBD en vraie grandeur.

On attend une construction exacte.
On utilise le compas pour le report des longueurs.



III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{ax^2 - 3x + b}{x - 1}$ où a et b sont deux réels.

Déterminer a et b sachant que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet au point A d'abscisse – 1 une tangente horizontale et au point B d'abscisse 4 une tangente parallèle à la droite Δ d'équation cartésienne $5x - 9y + 1 = 0$.

> Cet exercice – comme l'ensemble de la partie pour les « non spé » – a été complètement raté.
>
> Peut-être aurais-je dû demander d'abord de calculer $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = \dfrac{(2ax-3)\times(x-1)-(ax^2-3x+b)\times 1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{2ax^2 - ax^2 - 2ax - 3x + 3 + 3x - b}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^2 - 2ax + 3 - b}{(x-1)^2}$$

La courbe $\mathcal{C}$ admet au point A d'abscisse – 1 une tangente horizontale donc $f'(-1) = 0 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{a\times(-1)^2 - 2a\times(-1) + 3 - b}{(-1-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow a + 2a + 3 - b = 0$ (on se contente de dire que le numérateur est égal à 0)

$\Leftrightarrow 3a - b = -3$

Δ a pour équation réduite $y = \dfrac{5}{9}x + \dfrac{1}{9}$ donc Δ a pour coefficient directeur $\dfrac{5}{9}$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet au point B d'abscisse 4 une tangente parallèle à la droite Δ d'équation cartésienne $5x - 9y + 1 = 0$ donc $f'(4) = \dfrac{5}{9} \quad (2)$.

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{a\times 4^2 - 2a\times 4 + 3 - b}{(4-1)^2} = \dfrac{5}{9}$

$\Leftrightarrow \dfrac{8a + 3 - b}{9} = \dfrac{5}{9}$

$\Leftrightarrow 8a + 3 - b = 5$

$\Leftrightarrow 8a - b = 2$

On est donc amené à résoudre le système $(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} 3a - b = -3 \\ 8a - b = 2 \end{cases}$.

$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} -5a = -5 \\ 8a - b = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 8\times 1 - b = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}$

Corrigé de la partie pour les élèves ayant choisi la spécialité mathématiques (1 heure)

Dans les exercices **I** à **V**, aucune justification n'est demandée.

I.

Déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels tels que $5xy-y^2=49$.

On donnera uniquement les résultats (sans égalité). Le détail de la recherche n'est pas demandé.

$$(10\,;1) \text{ et } (10\,;49)$$

Certains élèves ont donné des résultats fractionnaires ; ils n'ont pas lu l'énoncé avec suffisamment de soin.
Il était demandé de déterminer tous les couples $(x\,;y)$ d'<u>entiers naturels</u> tels que $5xy-y^2=49$.

$y(5x-y)=49$

D'après cette égalité,
- y et $5x-y$ sont des diviseurs associés de 49 ;
- y et $5x-y$ sont tous les deux de même signe.

Or $y\in\mathbb{N}$ donc $5x-y$ est également positif.

Or les diviseurs positifs de 49 dont 1 ; 7 et 49.

Donc on est conduit à résoudre les systèmes :

$(\text{I})\ \begin{cases} y=1 \\ 5x-y=49 \end{cases}$ $\qquad (\text{II})\ \begin{cases} y=49 \\ 5x-y=1 \end{cases}$ $\qquad (\text{III})\ \begin{cases} y=7 \\ 5x-y=7 \end{cases}$

$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=10 \end{cases}$

$(\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} y=49 \\ x=10 \end{cases}$

$(\text{III}) \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=\dfrac{14}{5} \end{cases}$ (impossible)

On obtient les couples $(10\,;1)$ et $(10\,;49)$.

On vérifie que ces deux couples conviennent.

II.

On écrit tous les termes d'une suite (u_n) dans un tableau de 43 colonnes et d'un nombre illimité de lignes.
On commence par la première ligne, de gauche à droite.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
L_1	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	
L_2									
L_3									

1°) Dans quelle ligne et quelle colonne se trouve u_{99} ? u_{738} ? u_{2015} ?

u_{99} se trouve dans la ligne L_3 et dans la colonne C_{13}.

u_{738} se trouve dans la ligne L_{18} et dans la colonne C_7.

u_{2015} se trouve dans la ligne L_{47} et dans la colonne C_{37}.

Explications :

- L'égalité de la division euclidienne de 99 par 43 s'écrit $99=43\times2+13$ donc le terme u_{99} se trouve dans la ligne L_3 et dans la colonne C_{13}.

- L'égalité de la division euclidienne de 738 par 43 s'écrit $738=43\times17+7$ donc le terme u_{738} se trouve dans la ligne L_{18} et dans la colonne C_7.

- L'égalité de la division euclidienne de 2015 par 43 s'écrit $2015=43\times47+37$ donc le terme u_{2015} se trouve dans la ligne L_{47} et dans la colonne C_{37}.

2°) Le terme u_m se trouve dans la ligne L_i et dans la colonne C_j.
Déterminer une relation entre *i*, *j* et *m*. Aucune explication n'est demandée.

$$m=43(i-1)+j \text{ (une seule égalité)}$$

Pour comprendre le $i-1$, on se réfère aux exemples de la question 1°).

III.

On divise un entier naturel *n* par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98.
Quel est cet entier naturel *n* ?

2597

On note *q* le quotient commun des divisions euclidiennes de *n* par 152 et 147.

On a alors : $n = 152q + 13$ et $n = 147q + 38$.

D'où $152q + 13 = 147q + 38 \quad (1)$.

(1) donne alors $5q = 85$.

Par suite, $q = 17$.

On a donc $n = 152 \times 17 + 13 = 2597$.

IV.

Déterminer tous les entiers naturels qui dans la division euclidienne par 7 donnent un quotient égal au triple du reste.
Aucune justification n'est demandée.

0 ; 22 ; 44 ; 66 ; 88 ; 110 ; 132

Soit *n* un entier naturel qui dans la division euclidienne par 7 donne un quotient égal au triple du reste.

On note *r* le reste de la division euclidienne de *n* par 7.

On a : $n = 7 \times 3r + r \quad (1)$; $r \in \mathbb{N} \quad (2)$; $r < 7 \quad (3)$.

$(1) \Leftrightarrow n = 22r$

Compte tenu des conditions (2) et (3), il y a 7 valeurs possibles de *r* donc 7 valeurs possibles de *n*.

Pour $r = 0$, on a : $n = 0$.

Pour $r = 1$, on a : $n = 22$.

Pour $r = 2$, on a : $n = 44$.

Pour $r = 3$, on a : $n = 66$.

Pour $r = 4$, on a : $n = 88$.

Pour $r = 5$, on a : $n = 110$.

Pour $r = 6$, on a : $n = 132$.

On vérifie que toutes ces valeurs conviennent.

V.

1°) Donner sans expliquer la liste des diviseurs positifs de 102 dans l'ordre croissant.

1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 17 ; 34 ; 51 ; 102

2°) Déterminer tous les entiers naturels *m* tels que dans la division euclidienne de 135 par *m*, le reste est 33.

On rédigera la solution au verso.

Aide pour la démarche et la rédaction de cette question :

On rédigera la solution en deux parties.

1ère partie : recherche des valeurs possibles de *m*

Soit *m* un entier naturel tel que dans la division euclidienne de 135 par *m*, le reste est 33.

↕ phase de recherche à rédiger correctement

Les valeurs possibles de *m* sont …… .

2e partie : vérification des valeurs trouvées précédemment

On pourra présenter en tableau.

Enfin, on fera une conclusion claire pour tout l'exercice.
Soit *m* un entier naturel tel que dans la division euclidienne de 135 par *m*, le reste est 33.

Soit *q* le quotient de la division euclidienne de 135 par *m*.

On sait que $q \in \mathbb{N}$.

L'égalité de la division euclidienne de 135 par *m* s'écrit : $135 = mq + 33 \quad (1)$ avec $m > 33$.

$(1) \Leftrightarrow mq = 102$

On en déduit que *m* et *q* sont des diviseurs positifs associés de 102.

Grâce à la liste des diviseurs positifs de 102 trouvée au 1°) et compte tenu de la condition $m > 33$, on obtient les valeurs possibles de *m* et de *q*.

$m = 34$; $q = 3$

$m = 51$; $q = 2$

$m = 102$; $q = 1$

Les valeurs possibles de *m* sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 17 ; 34 ; 51 ; 102.

On vérifie que ces valeurs conviennent.

m	Égalité de la division euclidienne de 133 par *m*	Reste de la division euclidienne de 133 par *m*
34	$133 = 34 \times 3 + 33$	33
51	$133 = 51 \times 2 + 33$	33
102	$133 = 102 \times 1 + 33$	33

Les entiers naturels *m* tels que dans la division euclidienne de 135 par *m*, le reste est 33 sont : 34 ; 51 ; 102.