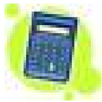
TS1 et TS2 spécialité

Contrôle du jeudi 15 octobre 2015 (50 minutes)



Prénom : …………………… **Nom : ………………………………**

Note : …. / 20

Ne rien écrire, ni surligner sur l'énoncé en dehors de ce qui est demandé.

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

Pour tout entier naturel *n*, on pose $A(n)=2n^2+9n+12$ et $B(n)=n+4$.

1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur du reste de la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$ à partir d'un entier naturel n_0 que l'on précisera (compléter la phrase ci-dessous).

D'après la calculatrice, il semble que pour tout entier naturel $n \geqslant ......$, le reste de la division euclidienne de

$A(n)$ par $B(n)$ est égal à …… .

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture. On ne demande pas d'étudier le cas des entiers naturels *n* strictement inférieurs à n_0.

• Compléter l'égalité : $A(n)=(2n+1)B(n)+............ \quad (1)$.

• Justifier avec précision que pour $n \geqslant n_0$ l'égalité (1) donne la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$ et conclure.

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)

Soit *a* un entier relatif non nul fixé. Le but de l'exercice est de déterminer tous les entiers relatifs qui, dans la division euclidienne par *a*, donnent un quotient égal au reste. On effectue un raisonnement en deux étapes (raisonnement par analyse-synthèse). Rédiger avec soin en présentant toutes les lettres utilisées.

1°) **Analyse**

Soit *n* un entier relatif tel que le reste et le quotient de la division euclidienne de *n* par *a* soient égaux.
Démontrer qu'il existe un entier naturel *q* tel que $n=q(a+1)$ et $q<|a|$.

………

………

………

………

………

………

2°) **Synthèse**

Soit *n* un entier relatif tel que $n=q(a+1)$ où *q* est un entier naturel tel que $q<|a|$.
Démontrer que le quotient et le reste de la division euclidienne de *n* par *a* sont égaux.

………

………

………

………

3°) **Conclusion**

Formuler une conclusion claire à l'exercice sous la forme d'une seule phrase.

………

………

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant, on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26,

- on associe à y la lettre correspondante. Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

Pour les questions 1°) et 2°), aucune explication n'est demandée. On pourra utiliser la calculatrice.

1°) Coder le mot ALICE.

…………………………..

2°) Décoder le mot ZXQRJU.

…………………………..

3°) Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26.
On admet que le décodage est donné par :
x est le reste de la division euclidienne de $ay+b$ par 26 où a et b sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9.
Déterminer les entiers naturels a et b.

………..….

………..….

………..….

IV. (2 points)

À l'aide du tableau ci-contre, déterminer tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 100 dont le reste de la division euclidienne par 11 est égal à 3 et le reste de la division euclidienne par 5 est égal à 4.

Les entiers cherchés sont : ………………………………. .

n	reste par 11	reste par 5
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	0
6	6	1
7	7	2
8	8	3
9	9	4
10	10	0
11	0	1
12	1	2
13	2	3
14	3	4
15	4	0
16	5	1
17	6	2
18	7	3
19	8	4
20	9	0
21	10	1
22	0	2
23	1	3
24	2	4
25	3	0
26	4	1
27	5	2
28	6	3
29	7	4
30	8	0
31	9	1
32	10	2
33	0	3
34	1	4
35	2	0
36	3	1
37	4	2
38	5	3
39	6	4
40	7	0
41	8	1
42	9	2
43	10	3
44	0	4
45	1	0
46	2	1
47	3	2
48	4	3
49	5	4
50	6	0

n	reste par 11	reste par 5
51	7	1
52	8	2
53	9	3
54	10	4
55	0	0
56	1	1
57	2	2
58	3	3
59	4	4
60	5	0
61	6	1
62	7	2
63	8	3
64	9	4
65	10	0
66	0	1
67	1	2
68	2	3
69	3	4
70	4	0
71	5	1
72	6	2
73	7	3
74	8	4
75	9	0
76	10	1
77	0	2
78	1	3
79	2	4
80	3	0
81	4	1
82	5	2
83	6	3
84	7	4
85	8	0
86	9	1
87	10	2
88	0	3
89	1	4
90	2	0
91	3	1
92	4	2
93	5	3
94	6	4
95	7	0
96	8	1
97	9	2
98	10	3
99	0	4
100	1	0

Corrigé du contrôle du 15-10-2015

I.

Pour tout entier naturel n, on pose $A(n)=2n^2+9n+12$ et $B(n)=n+4$.

1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur du reste de la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$ à partir d'un entier naturel n_0 que l'on précisera (compléter la phrase ci-dessous).

n	$A(n)$	$B(n)$	quotient de la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$	reste de la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$
0	12	4	3	0
1	23	5	4	3
2	38	6	6	2
3	57	7	8	1
4	71	8	8	7
5	107	9	11	8
6	138	10	13	8

Exemple :

Pour $n=0$, on a : $A(0)=12$ et $B(0)=4$.
Dans la division euclidienne de $A(0)$ par $B(0)$, le quotient est égal à 3 et le reste est égal à 0.

D'après la calculatrice, il semble que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, le reste de la division euclidienne de

$A(n)$ par $B(n)$ est égal à 8.

2°) Le but de cette question est de démontrer cette conjecture. On ne demande pas d'étudier le cas des entiers naturels n strictement inférieurs à n_0.

• Compléter l'égalité : $A(n)=(2n+1)B(n)+8 \quad (1)$.

En effet, on a :

$$\begin{aligned}(2n+1)B(n)+8&=(2n+1)(n+4)+8\\&=2n^2+8n+n+4+8\\&=2n^2+9n+12\\&=A(n)\end{aligned}$$

• Justifier avec précision que pour $n \geqslant n_0$ l'égalité (1) donne la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$ et conclure.

Dans l'égalité (1), on peut dire $(2n+1)\in\mathbb{N}$.

De plus, comme $n \geqslant 5$, on a : $n+4 \geqslant 9$ ce qui peut aussi s'écrire $n+4>8$ puisque $(n+4)\in\mathbb{N}$.

Donc l'égalité (1) donne la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$.

On en déduit que le reste de la division euclidienne de $A(n)$ par $B(n)$ est égal à 8.

La conjecture est donc démontrée.

II.

Soit a un entier relatif non nul fixé. Le but de l'exercice est de déterminer tous les entiers relatifs qui, dans la division euclidienne par a, donnent un quotient égal au reste. On effectue un raisonnement en deux étapes (raisonnement par analyse-synthèse). Rédiger avec soin en présentant toutes les lettres utilisées.

1°) **Analyse**

Soit n un entier relatif tel que le reste et le quotient de la division euclidienne de n par a soient égaux.
Démontrer qu'il existe un entier naturel q tel que $n=q(a+1)$ et $q<|a|$.

On note q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par a.

On sait que $q\in\mathbb{Z}$ et $r\in\mathbb{N}$.

On a : $n=q\times a+r$ où $0\leqslant r<|a|$.

Comme $q=r$, on peut écrire $n=q\times a+q$, $q\in\mathbb{N}$, $q<|a|$.

On a donc $n=q\times(a+1)$ [simple factorisation] avec q entier naturel tel que $q<|a|$.

2°) **Synthèse**

Soit n un entier relatif tel que $n=q(a+1)$ où q est un entier naturel tel que $q<|a|$.
Démontrer que le quotient et le reste de la division euclidienne de n par a sont égaux.

L'égalité $n=q(a+1)$ s'écrit $n=q\times a+q \quad (2)$ [simple développement].

Comme q est un entier naturel, on a : $0\leqslant q<|a|$.

L'égalité (2) correspond à la division euclidienne de n par a.

Le quotient de la division euclidienne de n par a est égal à q ; le reste de la division euclidienne de n par a est égal à q.

Donc le quotient et le reste de la division euclidienne de n par a sont égaux.

Dans cette partie, on peut avoir l'impression que l'on écrit un peu la même chose que dans la partie analyse. Une lecture attentive montre que ça n'est pas le cas.

3°) **Conclusion**

Formuler une conclusion claire à l'exercice sous la forme d'une seule phrase.

Les entiers relatifs qui, dans la division euclidienne par a, donnent un quotient égal au reste sont les entiers n qui s'écrivent sous la forme $n = q(a+1)$ où q est un entier naturel tel $q < |\,a\,|$.

III.

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant, on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26,

- on associe à y la lettre correspondante. Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

Pour les questions 1°) et 2°), aucune explication n'est demandée. On pourra utiliser la calculatrice.

On utilise la calculatrice.
Sur calculatrice TI 83 modèle noir, on tape dans $f(x)$: $\text{remainder}(15x+7, 26)$.
Sinon, on rentre la formule du reste à l'aide de la partie entière.
On obtient directement le tableau de codage (en vertical).

1°) Coder le mot ALICE.

HQXLP

2°) Décoder le mot ZXQRJU.

WILSON

Faire une table de cryptage.

Pour gagner du temps, utiliser la calculatrice en rentrant la fonction qui à tout entier x associe le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26 (par exemple $\text{Y1} = \text{remainder}(15\text{X}+7, 26)$ sur les modèles TI les plus récents). On règle la table pour avoir les images de tous les entiers naturels de 0 à 25 (donc avec un début de table à 0 et un pas de 1).
On obtient le tableau de correspondance suivant :

X	Y1
0	7
1	22
2	11
3	0
4	15
5	4
6	19
7	8
8	23
9	12
10	1
11	16
12	5
13	20
14	9
15	24
16	13
17	2
18	17
19	6
20	21
21	10
22	25
23	14
24	3
25	18

Méthode écrite par Diane Schneider le 22-10-2016 :

Pour résoudre cette question :
Dans le mode fonction, on insère « $\text{reste}(15x+7, 26)$ » puis on obtient un tableau avec une colonne x et une y (celle y correspond aux chiffres codés et celle x correspond aux chiffres correspondant aux lettres à coder).
Pour décoder on repère le chiffre de la lettre à décoder dans la colonne y puis on voit à quelle valeur de x il correspond puis on cherche à quelle lettre cette valeur de x correspond.

3°) Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26.
On admet que le décodage est donné par :
x est le reste de la division euclidienne de $ay+b$ par 26 où a et b sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9.
Déterminer les entiers naturels a et b.

Cette question est plus difficile ; personne ne l'a trouvée.

Il n'y avait pas la place dans l'énoncé pour donner la solution détaillée qui est donnée ci-dessous.
Seuls les résultats étaient attendus.

On va utiliser deux lettres bien choisies.

La lettre A (nombre 0) est codée par la lettre H (nombre 7).
Donc la lettre H (nombre 7) est décodée par la lettre A (nombre 0).
On en déduit que 0 est le reste de la division euclidienne de $7a+b$ par 26.
Par suite, $7a+b$ est divisible par 26.

La lettre D (nombre 3) est codée par la lettre A (nombre 0).
Donc la lettre A (nombre 0) est décodée par la lettre D (nombre 3).
On en déduit que 3 est donc le reste de la division euclidienne de $0\times a+b=b$ par 26.
Comme $1\leqslant b\leqslant 9$, on en déduit que $b=3$.

Comme $7a+b$ est divisible par 26, on en déduit que $7a+3$ est divisible par 26.
Par suite, $a=7$ (car $7\times 7+3=52=2\times 26$ est bien divisible par 26).

À l'aide du procédé de décodage, on peut retrouver sans problème le résultat de la question 2°).

IV.

À l'aide du tableau ci-contre, déterminer tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à 100 dont le reste de la division euclidienne par 11 est égal à 3 et le reste de la division euclidienne par 5 est égal à 4.

Les entiers cherchés sont : 14 et 69.

n	reste par 11	reste par 5
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	0
6	6	1
7	7	2
8	8	3
9	9	4
10	10	0
11	0	1
12	1	2
13	2	3
14	3	4
15	4	0
16	5	1
17	6	2
18	7	3
19	8	4
20	9	0
21	10	1
22	0	2
23	1	3
24	2	4
25	3	0
26	4	1
27	5	2
28	6	3
29	7	4
30	8	0
31	9	1
32	10	2
33	0	3
34	1	4
35	2	0
36	3	1
37	4	2
38	5	3
39	6	4
40	7	0
41	8	1
42	9	2
43	10	3
44	0	4
45	1	0
46	2	1
47	3	2
48	4	3
49	5	4
50	6	0

n	reste par 11	reste par 5
51	7	1
52	8	2
53	9	3
54	10	4
55	0	0
56	1	1
57	2	2
58	3	3
59	4	4
60	5	0
61	6	1
62	7	2
63	8	3
64	9	4
65	10	0
66	0	1
67	1	2
68	2	3
69	3	4
70	4	0
71	5	1
72	6	2
73	7	3
74	8	4
75	9	0
76	10	1
77	0	2
78	1	3
79	2	4
80	3	0
81	4	1
82	5	2
83	6	3
84	7	4
85	8	0
86	9	1
87	10	2
88	0	3
89	1	4
90	2	0
91	3	1
92	4	2
93	5	3
94	6	4
95	7	0
96	8	1
97	9	2
98	10	3
99	0	4
100	1	0