La courbe du chien

Introduction

Un renard affamé a décidé de faire d'un lapin son repas. Les deux animaux se déplacent par bonds successifs.
Le lapin se dirige tout droit vers son terrier, ultime salut.
Le renard, lui, se dirige à chaque bond en direction du lapin...

Première question : Quelle trajectoire suit le renard ?

Cette situation est connue sous le nom de courbe de poursuite ou courbe du chien.
➤ Plusieurs courbes peuvent être obtenues en fonction de la trajectoire initialement écrite.
➤ On retrouve les premières études de ces courbes, dans un mémoire de Pierre Bouguer[1] en 1734 et aussi dans les carnets de Léonard de Vinci. Cependant, il semble que peu de mathématiciens se soient intéressés à ces courbes.

Une résolution du problème fait intervenir le calcul différentiel[2]. Cette dernière ne relève pas d'un niveau lycée, mais il est quand même possible, dès la classe de seconde, de pouvoir apporter une réponse au problème que l'on se pose, à partir des outils, mathématiques et algorithmiques, mis à notre disposition.

Note : Plutôt que de suivre une activité liée au problème, le parti pris dans la suite a été d'essayer de présenter les grandes lignes de sa construction.

Première étape : choix d'un modèle

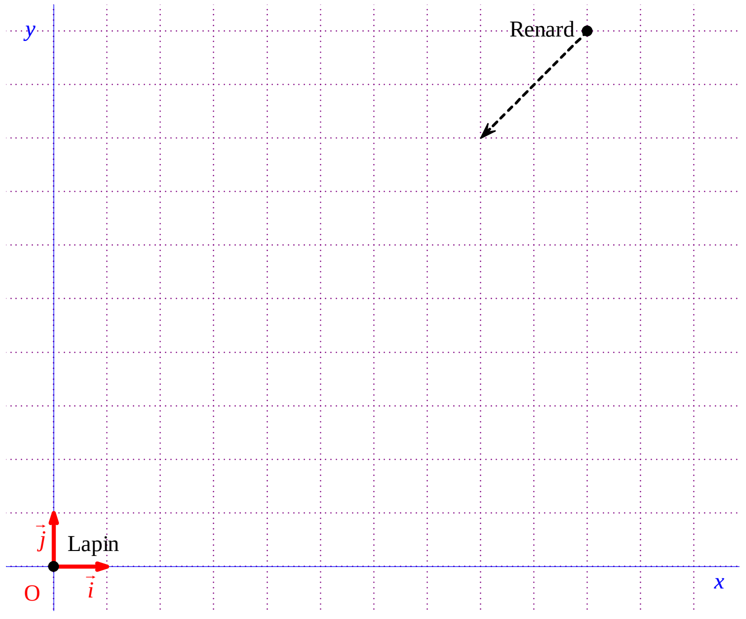
• À l'instant initial, le lapin se trouve à la position $(0\,;0)$ et le renard en position $(10\,;10)$.

• Le lapin et le renard se déplacent par bonds successifs, dont les amplitudes respectives, exprimées en mètres, seront notées l et r.

• Le déplacement du lapin se fait sur l'axe $[\mathrm{O}y)$.

• Le déplacement du renard se fait toujours dans la direction du lapin.

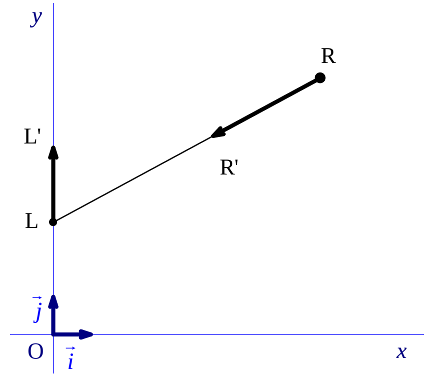
On suppose, en outre, que le lapin et le renard effectuent chacun de leurs sauts, au même instant.



Réalisation d'un algorithme

Le déplacement du renard se fait dans la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{RL}}$.
En notant $\mathrm{R}'(x'\,;y')$ la position du renard et $\mathrm{L}'(a'\,;b')$ celle du lapin après le bond suivant, on obtient :

$\overrightarrow{\mathrm{RR}'} = \dfrac{r}{\mathrm{RL}} \times \overrightarrow{\mathrm{RL}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{LL}'} = l \times \vec{j}$.



Ce qui permet d'obtenir les coordonnées de R' et L' à partir de $R(x\,;y)$ et $L(a\,;b)$:

$$\begin{cases} a' = a \\ b' = b + \text{▌} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + \dfrac{r \times (a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} \\ y' = y + \dfrac{r \times (b-y)}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}} \end{cases}$$

Note : Ce genre de transformations se prête tout naturellement à l'utilisation de suites, mais pour rester dans le cadre plus général nous n'en ferons pas usage.

Notre algorithme peut maintenant s'écrire assez facilement, en suivant ces grandes lignes :

- Partir des conditions initiales
- Afficher les points concernés
- Modifier les coordonnées des points
- Réitérer les deux instructions précédentes

On obtient alors :

Entrées :
Saisir r
Saisir ▌

Initialisations :
a prend la valeur 0
b prend la valeur 0
x prend la valeur 10
y prend la valeur 10

Traitement et sorties :
Afficher le point de coordonnées $(a\,;b)$
Afficher le point de coordonnées $(x\,;y)$
Pour k allant de 1 à 20 **Faire**
    d prend la valeur $\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$
    x prend la valeur $x + \dfrac{r \times (a-x)}{d}$
    y prend la valeur $y + \dfrac{r \times (b-y)}{d}$
    b prend la valeur $b + \text{▌}$
    Afficher le point de coordonnées $(a\,;b)$
    Afficher le point de coordonnées $(x\,;y)$
FinPour

a, *b*, *x*, *y*, *d*, *r* et ▌ désignent des réels.

Notes :

1. Mathématicien physicien français, 1698-1758

2. Voir, par exemple, la solution de Ernest Cesaro dans *Nouvelles annales de mathématiques* (1883)