$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 29 septembre 2015 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-\left|x^2-3\right|$.

Calculer les images par f de $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $1-\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On effectuera les calculs au brouillon.

$f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=$ ………… $f\left(1-\sqrt{2}\right)=$ ………… $f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=$ …………

II. (2 points)

On considère l'algorithme suivant, rédigé en langage naturel.

Variables : x et y deux nombres réels

Entrée :
Saisir x (réel différent de 0)

Traitement :
Si $x>0$
  alors y prend la valeur $\frac{2}{x}+x-1$
  Sinon
  y prend la valeur $\frac{2}{x}-x-1$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Compléter sans justifier la phrase suivante :

La fonction f qui à tout réel x non nul saisi en entrée associe le réel y affiché en sortie est définie par :

$f(x)=$ ……………………………… (une seule expression)

III. (3 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement de l'équation (1) et des inéquations (2) et (3) suivantes (recherche au brouillon) : $\left|2x-1\right|=3$ (1) ; $\left|2x-1\right|<3$ (2) ; $\left|2x-1\right|\geqslant 3$ (3).

$S_1=$ ………………………………	$S_2=$ ………………………………	$S_3=$ ………………………………

IV. (4 points : 2 points pour les coordonnées des deux vecteurs ; 2 points pour le calcul du déterminant)

Soit ABC un triangle quelconque. On note I et J les points définis par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=4\overrightarrow{AC}$.

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, I, J dans ce repère.

$A\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{array}\right.$ $B\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{array}\right.$ $C\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{array}\right.$ $I\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{array}\right.$ $J\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{array}\right.$

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ (ne donner aucun détailler des calculs).

$\overrightarrow{CI}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{array}\right.$ $\overrightarrow{BJ}\left|\begin{array}{l}\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\end{array}\right.$

Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ (aucune phrase n'est demandée).

………

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BJ}$? Répondre par une phrase.

………

………

V. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit ABC un triangle quelconque. On note U et V les points définis par $\overrightarrow{BU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1°) Exprimer $\overrightarrow{AU}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

……

……

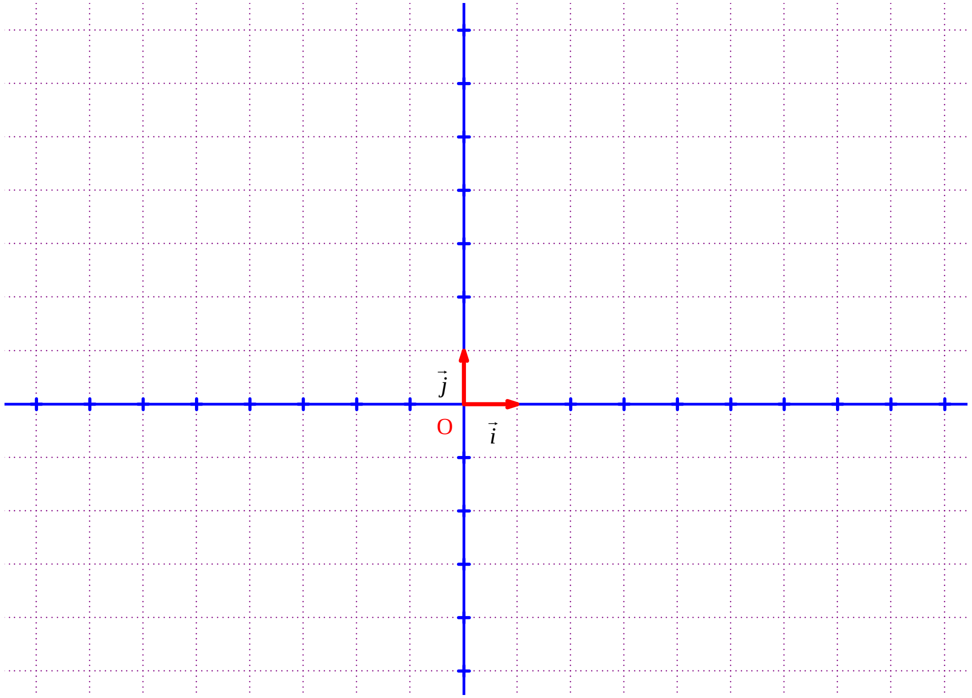
……

……

2°) Quelle est la nature du quadrilatère AUVC ? Justifier.

……

……



VI. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne la droite *D* d'équation $2x-3y+6=0$, le point $\mathrm{A}\left|\begin{array}{l}1\\7\end{array}\right.$ et le vecteur $\vec{v}\left|\begin{array}{l}2\\-3\end{array}\right.$.

1°) Tracer sans explication sur le graphique ci-contre la droite *D*.

2°) Tracer sans explication sur le graphique la droite D' passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$. On tracera sur le graphique un représentant de $\vec{v}$.

3°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D'. Le modèle de rédaction est donné.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M}\in D'$ si et seulement si ………………………………………………………………………………………

si et seulement si $\begin{vmatrix} \text{..........} & \text{..........} \\ \text{..........} & \text{..........} \end{vmatrix} = \text{.....}$

si et seulement si ………………………………………………………………………………………

si et seulement si ………………………………………………………………………………………

si et seulement si ………………………………………………………………………………………

D' a pour équation cartésienne ……………………………………………………..

Corrigé du contrôle du 29-9-2015

I. (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-\left|x^2-3\right|$.

Calculer les images par f de $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $1-\sqrt{2}$, $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. On effectuera les calculs au brouillon.

$f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $f\left(1-\sqrt{2}\right)=1-2\sqrt{2}$ $\qquad$ $f\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}-2$

$\left|x^2-3\right|$ désigne la valeur absolue de x^2-3.

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)&=1-\left|\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-3\right|\\
&=1-\left|\frac{4}{3}-3\right|\\
&=1-\left|-\frac{5}{3}\right|\\
&=1-\frac{5}{3}\\
&=-\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(1-\sqrt{2}\right)&=1-\left|\left(1-\sqrt{2}\right)^2-3\right|\\
&=1-\left|\left(1-2\sqrt{2}+2\right)-3\right|\\
&=1-\left|3-2\sqrt{2}-3\right|\\
&=1-\left|-2\sqrt{2}\right|\\
&=1-2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)&=1-\left|\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2-3\right|\\
&=1-\left|\frac{\pi}{4}-3\right|\\
&=1-\left(3-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

(car $\dfrac{\pi}{4}-3<0$; la valeur absolue d'un réel négatif est égal à son opposé)

$$=\frac{\pi}{4}-2$$

III. (2 points)

On considère l'algorithme suivant, rédigé en langage naturel.

Variables : x et y deux nombres réels

Entrée :
Saisir x (réel différent de 0)

Traitement :
Si $x>0$
  alors y prend la valeur $\dfrac{2}{x}+x-1$
  Sinon
  y prend la valeur $\dfrac{2}{x}-x-1$
FinSi

Sortie :
Afficher y

Compléter sans justifier la phrase suivante :

La fonction f qui à tout réel x non nul saisi en entrée associe le réel y affiché en sortie est définie par :

$f(x)=\dfrac{2}{x}+\left|x\right|-1$ (une seule expression)

D'après l'algorithme, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{2}{x}+x-1$ si $x>0$ et $f(x)=\dfrac{2}{x}-x-1$ si $x<0$.

III. (3 points)

Déterminer les ensembles de solutions S_1, S_2, S_3 respectivement de l'équation (1) et des inéquations (2) et (3) suivantes (recherche au brouillon) : $\left|2x-1\right|=3$ (1) ; $\left|2x-1\right|<3$ (2) ; $\left|2x-1\right|\geqslant 3$ (3).

$S_1=\{-1\,;2\}$	$S_2=\left]-1\,;2\right[$	$S_3=\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[2\,;+\infty\right[$

IV. (4 points : 2 points pour les coordonnées des deux vecteurs ; 2 points pour le calcul du déterminant)

Soit ABC un triangle quelconque. On note I et J les points définis par $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=4\overrightarrow{AC}$.

On se place dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Faire une figure.

Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, C, I, J dans ce repère.

$A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ $C\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ $I\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\\0\end{vmatrix}$ $J\begin{vmatrix}0\\4\end{vmatrix}$

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ (ne donner aucun détailler des calculs).

$\overrightarrow{CI}\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\\-1\end{vmatrix}$ $\overrightarrow{BJ}\begin{vmatrix}-1\\4\end{vmatrix}$

Calculer le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ (aucune phrase n'est demandée).

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{4} & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\times 4-(-1)\times(-1)=0$$

Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BJ}$? Répondre par une phrase.

Comme le déterminant est égal à 0, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires.

V. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit ABC un triangle quelconque. On note U et V les points définis par $\overrightarrow{BU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1°) Exprimer $\overrightarrow{AU}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AU}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BU}$ (relation de Chasles)

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$ (relation de Chasles dans sa forme soustractive)

$=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

2°) Quelle est la nature du quadrilatère AUVC ? Justifier.

On constate que $\overrightarrow{AU}=\overrightarrow{CV}$, donc le quadrilatère AUVC est un parallélogramme.

On évite d'employer un pronom démonstratif dans la rédaction (exemple : « C'est un parallélogramme car $\overrightarrow{BU}=\overrightarrow{CV}$ »).

VI. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne la droite *D* d'équation $2x-3y+6=0$, le point $A\begin{vmatrix}1\\7\end{vmatrix}$ et le vecteur $\vec{v}\begin{vmatrix}2\\-3\end{vmatrix}$.

1°) Tracer sans explication sur le graphique ci-contre la droite *D*.

On cherche deux points à cordonnées entières qui appartiennent à *D*.

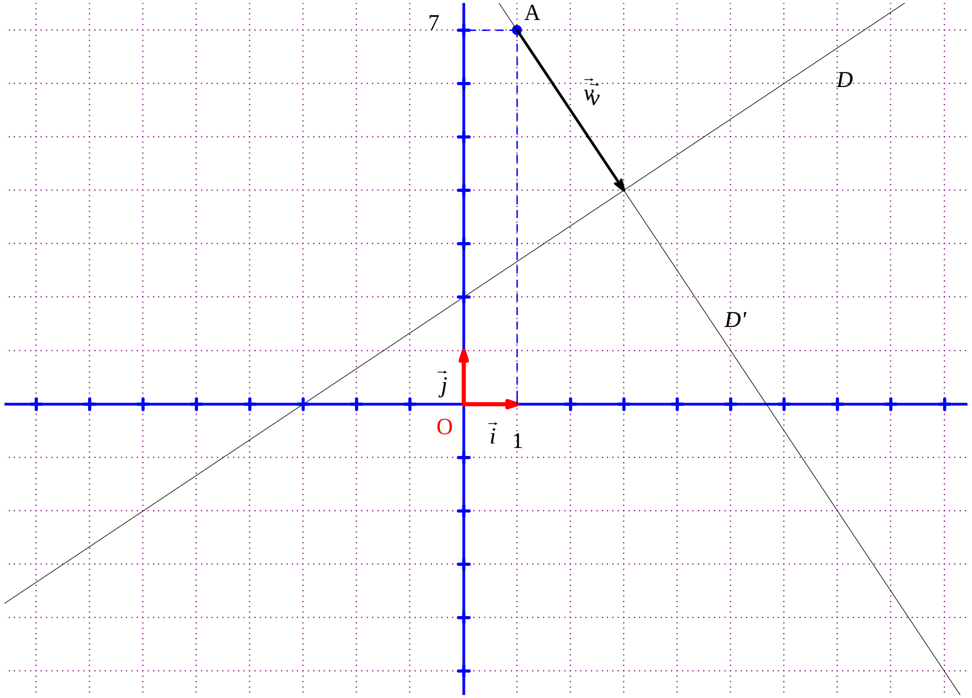
On cherche des couples $(x\,;y)$ tels que $2x-3y+6=0$.
Par exemple, les points de coordonnées $(-3\,;0)$ et $(3\,;4)$ appartiennent à *D*.

Si on n'y arrive pas, on passe l'équation cartésienne en équation réduite $y=\frac{2x+6}{3}$ soit $y=\frac{2}{3}x+2$. On remplace ensuite x par deux valeurs (on va choisir des multiples de 3) et on calcule les valeurs de y correspondantes.

x	-3	3
y	0	4

2°) Tracer sans explication sur le graphique la droite D' passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$. On tracera sur le graphique un représentant de $\vec{v}$.

$\vec{v}=2\vec{i}-3\vec{j}$



3°) Déterminer une équation cartésienne de la droite D'. Le modèle de rédaction est donné.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

M $\in D'$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ y-7 & -3 \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $(x-1)\times(-3)-(y-7)\times 2=0$

si et seulement si $-3x+3-2y+14=0$

si et seulement si $3x+2y-17=0$

D' a pour équation cartésienne $3x+2y-17=0$.