**TS1 spécialité**

# Contrôle du jeudi 24 septembre 2015 (50 minutes)

**Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.**

**Note : …. / 20**

---

**Prénom : …………………………………** **Nom : ………………………………………………………**

---

## I. (2 points)

Soit $n$ un entier naturel quelconque.
Démontrer que le nombre $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ est divisible par 13. Justifier convenablement.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

---

## II. (3 points)

Combien y a-t-il de multiples de 29 compris entre – 367 000 et 200 000 au sens large ?
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

……………………….. (un seul résultat)

---

## III. (5 points : 1°) a) 2 points ; b) 2 points ; c) 1 point ; 2°) 0 point)

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers relatifs $n$ tels que $n$ divise $n+1$ à l'aide de la définition.

1°) Soit $n$ un entier relatif tel que $n$ divise $n+1$.

a) Justifier qu'il existe un entier relatif $k$ tel que $n \times (k-1) = 1$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

b) En déduire les valeurs possibles de $n$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

c) Expliquer par une phrase (sans faire de calcul) pourquoi les valeurs trouvées précédemment conviennent.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

2°) Faire une phrase de conclusion.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

**IV. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 5 points ; 3°) 3 points)**

1°) Démontrer à l'aide d'une égalité que pour tout entier relatif *n*, $n^3-8$ est divisible par $n-2$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer les entiers relatifs *n* tels que $n-2$ divise $2n^3-12$.
On pourra écrire que $2n^3-12=2\left(n^3-8\right)+4$.

On rédigera le début sous la forme : « Soit *n* un entier relatif tel que $n-2$ divise $2n^3-12$. »

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

3°) Déterminer les entiers relatifs *n* tels que $(n-2)^2$ divise $2n^3-12$.

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………

# Consignes orales

① Ne pas utiliser le symbole d’équivalence dans ce contrôle.

② Ne pas écrire $S = \{.........\}$ dans la conclusion des exercices **III** et **IV** (il n’y a pas d’équation à résoudre).

# Corrigé

**I. (2 points)**

Soit $n$ un entier naturel quelconque.
Démontrer que le nombre $3^n+3^{n+1}+3^{n+2}$ est divisible par 13. Justifier convenablement.

$$\begin{aligned}3^n+3^{n+1}+3^{n+2}&=3^n+3^n\times 3+3^n\times 3^2\\&=3^n\times\left(1+3+3^2\right)\\&=3^n\times 13\end{aligned}$$

$n\in\mathbb{N}$ donc $3^n\in\mathbb{N}$ (important à dire).

Par suite, $13 \mid 3^n+3^{n+1}+3^{n+2}$.

---

**II. (3 points)**

Combien y a-t-il de multiples de 29 compris entre – 367 000 et 200 000 au sens large ?
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

19 552 (un seul résultat)

Comme – 367 000 et 200 000 sont de très grands nombres, il n'est pas possible d'utiliser la calculatrice pour les compter.
Il fallait s'y prendre autrement en disant que les multiples de 29 sont tous les nombres qui s'écrivent sous la forme 29$k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On cherche les entiers relatifs $k$ tels que $-367\ 000\leqslant 29k\leqslant 200\ 000 \quad (1)$.

$(1)\Leftrightarrow -\dfrac{367\ 000}{29}\leqslant k\leqslant\dfrac{200\ 000}{29}$

Avec la calculatrice, on trouve $-\dfrac{367\ 000}{29}=-12\,655{,}1724...$ et $\dfrac{200\ 000}{29}=6\,896{,}55172...$.

Les entiers relatifs vérifiant $(1)$ sont donc tous les entiers relatifs compris entre – 12 655 et 6 896 au sens large.

Le nombre d'entiers est donc égal à $6\ 896-(-12655)+1=19\ 552$.

On utilise le résultat suivant à connaître :

Soit $n$ et $p$ deux entiers relatifs tels que $p\leqslant n$.
Le cardinal de l'intervalle d'entiers $[\![p\,;n]\!]$ est égal à $n-p+1$.

$$\text{card}[\![p\,;n]\!]=n-p+1$$

---

**III. (5 points : 1°) a) 2 points ; b) 2 points ; c) 1 point ; 2°) 0 point)**

Le but de l'exercice est de déterminer les entiers relatifs $n$ tels que $n$ divise $n+1$ à l'aide de la définition.

1°) Soit $n$ un entier relatif tel que $n$ divise $n+1$.

a) Justifier qu'il existe un entier relatif $k$ tel que $n\times(k-1)=1$.

$n \mid n+1$ donc il existe un entier relatif $k$ tel que $n+1=k\times n$ (1).

(1) donne alors : $k\times n-n=1$ soit encore $n\times(k-1)=1$ (2).

b) En déduire les valeurs possibles de $n$.

D'après (2), comme $n$ et $k-1$ sont des entiers, on peut dire que ce sont des diviseurs associés de 1.

Or les seuls diviseurs de 1 sont 1 et – 1.

Donc on a deux cas :

1[er] cas : $n=1$ et $k-1=1$ soit $k=2$

2[e] cas : $n=-1$ et $k-1=-1$ soit $k=0$

c) Expliquer par une phrase (sans faire de calcul) pourquoi les valeurs trouvées précédemment conviennent.

1 et – 1 divisent tous les entiers relatifs donc les valeurs trouvées précédemment conviennent.

2°) Faire une phrase de conclusion.

Les entiers relatifs $n$ tels que $n$ divise $n+1$ sont 1 et – 1.

*Quelques élèves n'ont pas su formuler une conclusion correcte à l'exercice.*

**IV. (10 points : 1°) 2 points ; 2°) 5 points ; 3°) 3 points)**

1°) Démontrer à l'aide d'une égalité que pour tout entier relatif *n*, $n^3-8$ est divisible par $n-2$.

$$n^3-8=n^3-2^3$$
$$=(n-2)(n^2+2n+4)$$

Or $(n^2+2n+4)\in\mathbb{Z}$ car $n\in\mathbb{Z}$.

On en déduit que $n-2 \mid n^3-8$.

2°) Déterminer les entiers relatifs *n* tels que $n-2$ divise $2n^3-12$.
On pourra écrire que $2n^3-12=2(n^3-8)+4$.

On rédigera le début sous la forme : « Soit *n* un entier relatif tel que $n-2$ divise $2n^3-12$. »

Soit *n* un entier relatif tel que $n-2$ divise $2n^3-12$.

$n-2 \mid 2n^3-12$ donc $n-2 \mid 2(n^3-8)+4$.

De plus, $n-2 \mid n^3-8$.

Donc $n-2$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de $2(n^3-8)+4$ et $n^3-8$.
Donc $n-2 \mid 2(n^3-8)+4-2(n^3-8)$.

Donc $n-2 \mid 4$.

Les diviseurs de 4 sont 1 ; 2 ; 4 ; – 1 ; – 2 ; – 4.

Il y a donc 8 cas possibles pour les valeurs de $n-2$.

1^er^ cas : $n-2=1$ qui donne $n=3$

2^e^ cas : $n-2=2$ qui donne $n=4$

3^e^ cas : $n-2=4$ qui donne $n=6$

4^e^ cas : $n-2=-1$ qui donne $n=1$

5^e^ cas : $n-2=-2$ qui donne $n=0$

6^e^ cas : $n-2=-4$ qui donne $n=-2$

Les valeurs possibles de *n* sont donc – 2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 6.

On vérifie que ces valeurs conviennent.

Les entiers *n* cherchés sont donc – 2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 6.

3°) Déterminer les entiers relatifs *n* tels que $(n-2)^2$ divise $2n^3-12$.

Soit *n* un entier relatif tel que $(n-2)^2$ divise $2n^3-12$.

On a : $n-2 \mid (n-2)^2$ et $(n-2)^2 \mid 2n^3-12$.
Donc par transitivité $n-2 \mid 2n^3-12$.

D'après la question 2°), les valeurs possibles de *n* sont donc – 2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 6.

On teste toutes ces valeurs.

On peut utiliser une présentation en tableau très claire comme ci-dessous (bien qu'il n'y avait pas la place sur le sujet). Il s'agit d'une sorte de « table de vérité ».

| $n$ | $(n-2)^2$ | $2n^3-12$ | $(n-2)^2 \mid 2n^3-12$ ? |
|---|---|---|---|
| – 2 | 16 | – 28 | F |
| 0 | 4 | – 12 | V |
| 1 | 1 | – 10 (calcul inutile) | V |
| 3 | 1 | 42 (calcul inutile) | V |
| 4 | 4 | 116 | V |
| 6 | 16 | 420 | F |

Les entiers *n* cherchés sont donc 0 ; 1 ; 3 ; 4.