TS2 spécialité

Contrôle du mercredi 23 septembre 2015 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : ………………………………… **Nom : ……………………………………………………**

I. (2 points)

Soit n un entier naturel quelconque.

Démontrer que le nombre $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. Justifier convenablement.

………

………

………

………

………

………

II. (2 points)

Combien y a-t-il de multiples de 29 compris entre – 367 et 2015 au sens large ?
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

……………………….. (un seul résultat)

III. (2 points)

Quel est le multiple de 11 compris entre 100 et 150 qui a le moins de diviseurs ?
Répondre sans faire de phrase.

……………………….. (un seul résultat)

IV. (2 points)

Démontrer que les nombres qui s'écrivent $\overline{aaabbb}$ en base 10 où a et b sont des entiers naturels et a est non nul sont divisibles par 37.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

V. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 5 points)

1°) Démontrer à l'aide d'une égalité que pour tout entier relatif n, n^3-8 est divisible par $n-2$.

………

………

………

………

………

2°) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-2$ divise n^3-4.
On pourra écrire que $n^3-4=n^3-8+4$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VI. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points)

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que l'on ait :
$x^2=4y^2+17$ (1).

1°) Compléter les pointillés dans chaque parenthèse : (1) $\Leftrightarrow$ $(\ldots\ldots\ldots\ldots)\times(\ldots\ldots\ldots\ldots)=17$ (1').

2°) Compléter la phrase suivante :

(1') $\Leftrightarrow$ $x+2y$ et $x-2y$ sont des ……………………………………………… de 17.

3°) En déduire les couples $(x\,;\,y)$ cherchés. On ne demande pas de détailler la démarche.
Écrire la liste sans faire de phrase.

………

Corrigé du contrôle du 23-9-2015

I.

Soit n un entier naturel quelconque.

Démontrer que le nombre $2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7. Justifier convenablement.

$$\begin{aligned} 2^n+2^{n+1}+2^{n+2} &= 2^n+2^n\times 2+2^n\times 2^2 \\ &= 2^n\times\left(1+2+2^2\right) \\ &= 7\times 2^n \end{aligned}$$

$2^n\in\mathbb{N}$ (important à dire) donc $7 \mid 2^n+2^{n+1}+2^{n+2}$.

II.

Combien y a-t-il de multiples de 29 compris entre – 367 et 2015 au sens large ?
Répondre sans faire de phrase et sans justifier.

82 (un seul résultat)

1ère méthode (fastidieuse) : faire un tableau de valeurs avec la calculatrice

2e méthode (meilleure) :

Les multiples de 29 sont tous les nombres qui s'écrivent sous la forme $29k$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On cherche les entiers relatifs k tels que $-367\leqslant 29k\leqslant 2015 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow -\dfrac{367}{29}\leqslant k\leqslant\dfrac{2015}{29}$

Avec la calculatrice, on trouve $-\dfrac{367}{29}=-12{,}655...$ et $\dfrac{2015}{29}=69{,}48...$.

Les entiers relatifs vérifiant (1) sont donc tous les entiers relatifs compris entre – 12 et 69 au sens large.

Le nombre d'entiers est donc égal à $69-(-12)+1=82$.

On utilise le résultat suivant :

Soit n et p deux entiers relatifs tels que $p\leqslant n$.
Le cardinal de l'intervalle d'entiers $[\![p\,;n]\!]$ est égal à $n-p+1$.

$$\text{card}[\![p\,;n]\!]=n-p+1$$

III.

Quel est le multiple de 11 compris entre 100 et 150 qui a le moins de diviseurs ?
Répondre sans faire de phrase.

121 (un seul résultat)

Un multiple de 11 compris entre 100 et 150 s'écrit $11k$ avec $k\in\{10\,;11\,;12\,;13\}$. Celui qui a le moins de diviseurs correspond à $k=11$, qui donnera comme diviseurs 1 et 11 alors que 10 ; 12 et 13 en donneront plus.
Les diviseurs positifs de 121 sont 1 ; 11 ; 121.
Donc celui des multiples de 11 compris entre 100 et 150 qui a le moins de diviseurs est 121.

IV.

Démontrer que les nombres qui s'écrivent $\overline{aaabbb}$ en base 10 où a et b sont des entiers naturels et a est non nul sont divisibles par 37.

$$\begin{aligned} \overline{aaabbb} &= 100000a+10000a+1000a+100b+10b+b \\ &= 111000a+111b \\ &= 111(b+1000a) \end{aligned}$$

$b+1000a\in\mathbb{N}$ donc $111 \mid \overline{aaabbb}$.

Or $111=37\times 3$ donc 37 | 111.

Par transitivité, $37 \mid \overline{aaabbb}$.

V.

1°) Démontrer à l'aide d'une égalité que pour tout entier relatif n, n^3-8 est divisible par $n-2$.

$$\begin{aligned} n^3-8 &= n^3-2^3 \\ &= (n-2)\left(n^2+2n+4\right) \end{aligned}$$

Or $\left(n^2+2n+4\right)\in\mathbb{Z}$ car $n\in\mathbb{Z}$.

On en déduit que $n-2 \mid n^3-8$.

2°) Déterminer les entiers relatifs n tels que $n-2$ divise n^3-4.
On pourra écrire que $n^3-4=n^3-8+4$.

Soit n un entier relatif tel que $n-2$ divise n^3-4.

$n-2 \mid n^3-4$ donc $n-2 \mid n^3-8+4$.

De plus, $n-2 \mid n^3-8$.

Donc $n-2$ divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs de n^3-8+4 et n^3-8.

Donc $n-2 \mid 4$.

Les diviseurs de 4 sont 1 ; 2 ; 4 ; – 1 ; – 2 ; – 4.

Il y a donc 8 cas possibles pour les valeurs de $n-2$.

1er cas : $n-2=1$ qui donne $n=3$

2e cas : $n-2=2$ qui donne $n=4$

3e cas : $n-2=4$ qui donne $n=6$

4e cas : $n-2=-1$ qui donne $n=1$

5e cas : $n-2=-2$ qui donne $n=0$

6e cas : $n-2=-4$ qui donne $n=-2$

Les valeurs possibles de *n* sont donc – 2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 6.

On vérifie que ces valeurs conviennent.

Les entiers *n* cherchés sont donc – 2 ; 0 ; 1 ; 3 ; 4 ; 6.

VI.

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que l'on ait :
$x^2=4y^2+17$ (1).

1°) Compléter les pointillés dans chaque parenthèse : (1) $\Leftrightarrow$ $(x+2y)\times(x-2y)=17$ (1').

2°) Compléter la phrase suivante :

(1') $\Leftrightarrow$ $x+2y$ et $x-2y$ sont des diviseurs associés de 17.

Il faudrait dire que $x+2y$ et $x-2y$ sont des entiers.

3°) En déduire les couples $(x\,;\,y)$ cherchés. On ne demande pas de détailler la démarche.
Écrire la liste sans faire de phrase.

$$(9\,;-4)\ ;\ (9\,;4)\ ;\ (-9\,;-4)\ ;\ (-9\,;-4)$$

x et *y* étant des entiers relatifs, on ne rend pas en compte le fait que l'un des diviseurs associés soit plus petit que l'autre.
On ne le fait que pour des entiers naturels.