1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 15 septembre 2015 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (6 points : 2 points par réponse)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$ valeur absolue de $\left(x^2 - 1\right)$.

Calculer les images par f de $2\sqrt{5}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{3}$. On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera uniquement les résultats sous forme simplifiée.

$f\left(2\sqrt{5}\right) =$ .... $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) =$ .... $f\left(\dfrac{2}{3}\right) =$ ....

II. (2 points)

Soit Δ une droite graduée horizontale de repère (O, I) tel que $\text{OI} = 1$. On suppose que O est à gauche de I.
Une puce se déplace sur Δ en partant de O. Elle saute d'une unité vers la droite, puis de deux unités vers la gauche, puis de trois unités vers la droite, puis de quatre unités vers la gauche, puis de cinq unités vers la droite et ainsi de suite.

1°) Déterminer l'abscisse du point en lequel se trouve la puce au bout de 2015 sauts.

……………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) Quelle est la distance totale parcourue au bout de 10 sauts (en partant du point O) ? de 2015 sauts ?

……………………… (un seul résultat sans égalité)

III. (1 point)

Soit x un réel strictement positif.
Exprimer en fonction de x la distance entre $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x+1}$.
Donner le résultat sous la forme d'un seul quotient sans justifier.

……………………………………… (un seul résultat sans égalité)

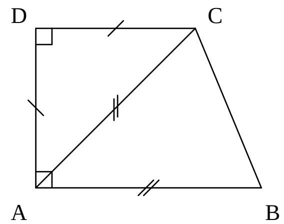
IV. (4 points)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note I le milieu de [BC].
On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$.
Exprimer en fonction de α les mesures en radians des angles $\widehat{\text{ACB}}$ et $\widehat{\text{AIB}}$ (un seul résultat à chaque fois).

$\widehat{\text{ACB}} =$ .... $\widehat{\text{AIB}} =$ ....

V. (4 points : 2 points par réponse)

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [CD].
Déterminer la mesure en radians des angles $\widehat{\text{BAC}}$ et $\widehat{\text{ABC}}$.

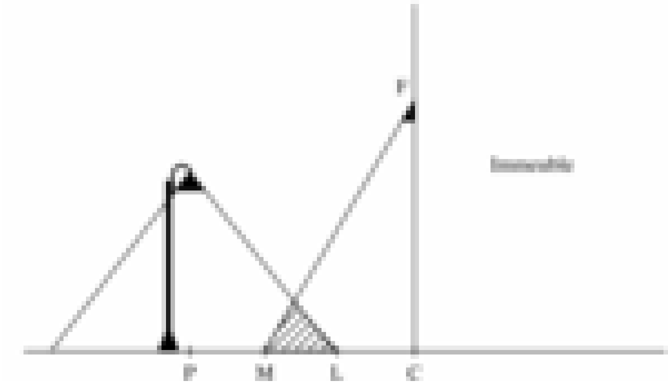


Ne rien écrire sur la figure.

$\widehat{\text{BAC}} =$ .... $\widehat{\text{ABC}} =$ ....

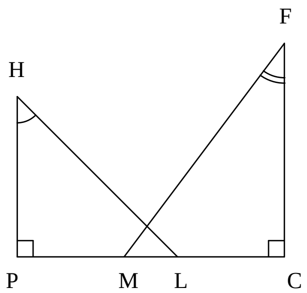
VI. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



Ne rien écrire sur le schéma.

On réalise la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :



Ne rien écrire sur la figure.

On dispose des données suivantes : $PC = 5{,}5$ m ; $CF = 5$ m ; $HP = 4$ m ; $\widehat{MFC} = 33°$; $\widehat{PHL} = 40°$.

1°) Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière.
Donner l'expression exacte puis la valeur arrondie au centimètre.

LM = ... m (expression exacte)

LM ≈ .... m (valeur arrondie au centième)

2°) On effectue des réglages du spot situé en F afin que les points M et L soient confondus.
Déterminer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

$\widehat{CFM} \approx$ ....° (valeur arrondie à l'unité)

Corrigé du contrôle du 15-9-2015

I.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)$ = valeur absolue de $\left(x^2-1\right)$.

Calculer les images par f de $2\sqrt{5}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{2}{3}$. On effectuera les calculs au brouillon et l'on donnera uniquement les résultats sous forme simplifiée.

$f\left(2\sqrt{5}\right)=19$ $\qquad$ $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{5}{9}$

$f\left(2\sqrt{5}\right)$ = valeur absolue de $\left(\left(2\sqrt{5}\right)^2-1\right)$

= valeur absolue de $(20-1)$

= valeur absolue de 19

$=19$

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ = valeur absolue de $\left(\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1\right)$

= valeur absolue de $\left(\dfrac{1}{3}-1\right)$

= valeur absolue de $\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

$=\dfrac{2}{3}$

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ = valeur absolue de $\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-1\right)$

= valeur absolue de $\left(\dfrac{4}{9}-1\right)$

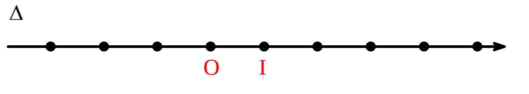
= valeur absolue de $\left(-\dfrac{5}{9}\right)$

$=\dfrac{5}{9}$

- On peut noter que tous les résultats sont positifs ou nuls (car le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul).
- On pouvait effectuer les calculs mentalement.
- On peut vérifier les résultats à la calculatrice en rentrant la fonction préalablement.

II.

Soit Δ une droite graduée horizontale de repère (O, I) tel que $\text{OI}=1$. On suppose que O est à gauche de I.
Une puce se déplace sur Δ en partant de O. Elle saute d'une unité vers la droite, puis de deux unités vers la gauche, puis de trois unités vers la droite, puis de quatre unités vers la gauche, puis de cinq unités vers la droite et ainsi de suite.



Le sens positif sur est de la gauche vers la droite Δ.

1°) Déterminer l'abscisse du point en lequel se trouve la puce au bout de 2015 sauts.

1008 (un seul résultat sans égalité)

L'abscisse du point cherché s'obtient en calculant une somme algébrique. Le calcul de cette somme repose sur une astuce de groupement des termes par 2.

On calcule la somme « à la main » :

$S=1-2+3-4+...+2013-2014+2015$ (on écrit la somme algébrique avec des petits points)

$=(1-2)+(3-4)+...+(2013-2014)+2015$ (on groupe les termes par deux ; il reste 2015 tout seul)

$=\underbrace{-1-1-...-1}_{\text{1007 termes}}+2015$ $\qquad$ $(1-2=-1,\ \ 3-4=-1$ etc.)

1007 termes (on trouve 1007 en effectuant 2014 divisé par 2)

$=-1007+2015$

$=1008$

Au bout de 2015 sauts, la puce se trouve au point de Δ d'abscisse 1008.

On pourrait aussi faire un programme sur calculatrice.

2°) Quelle est la distance totale parcourue au bout de 10 sauts (en partant du point O) ? de 2015 sauts (bonus) ?

55 (un seul résultat sans égalité)

Pour 10 sauts, on calcule la somme suivante (qui correspond à la somme des valeurs absolues) :

$$\begin{aligned} S' &= 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Pour 2015 sauts, on calcule la somme :

$$\begin{aligned} S' &= 1+2+3+\ldots+2015 \\ &= \frac{2015\times 2016}{2} \quad \text{(formule que nous verrons plus tard)} \\ &= 2\ 031\ 120 \end{aligned}$$

III.

Soit x un réel strictement positif.
Exprimer en fonction de x la distance entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x+1}$.
Donner le résultat sous la forme d'un seul quotient sans justifier.

$\frac{1}{x(x+1)}$ (un seul résultat sans égalité)

On commence par comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x+1}$.

$x>0$ donc $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{x}$.

Par conséquent, on a :

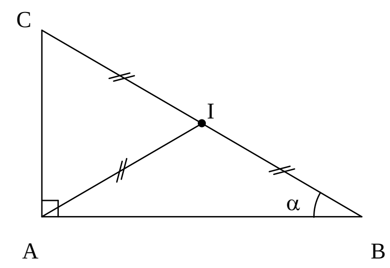
$$\begin{aligned} \text{distance entre } \frac{1}{x} \text{ et } \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x+1-x}{x(x+1)} \\ &= \frac{1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

On utilise la formule $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

IV.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note I le milieu de [BC].
On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{ABC}$.
Exprimer en fonction de α les mesures en radians des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AIB}$ (un seul résultat à chaque fois).

$\widehat{ACB}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ $\qquad\qquad$ $\widehat{AIB}=\pi-2\alpha$



On travaille directement en radians sans repasser par les degrés.

On utilise la propriété :

« La somme des mesures en radians d'un triangle quelconque est égale à π. »

Justification du premier résultat :

On utilise ensuite la somme des mesures en radians des angles du triangle ABC.

$$\widehat{ACB}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

Justification du deuxième résultat :

Le triangle ABC est rectangle en A donc nous savons que $IA=IB=IC$ (propriété de 4^e^ sur le triangle rectangle).
Par conséquent, le triangle ABI est isocèle en I.
Les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{IBA}$ ont donc la même mesure en radians (propriété de 6^e^ : « Dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure »).

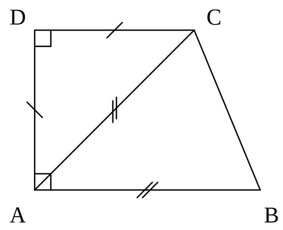
D'où $\widehat{BAI}=\alpha$.

On utilise ensuite la somme des mesures en radians des angles du triangle ABI.

$$\widehat{ACB}=\pi-(\alpha+\alpha)=\pi-2\alpha$$

V.

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze rectangle de bases [AB] et [CD].
Déterminer la mesure en radians des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$.



Ne rien écrire sur la figure.

$\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad\qquad$ $\widehat{ABC} = \dfrac{3\pi}{8}$

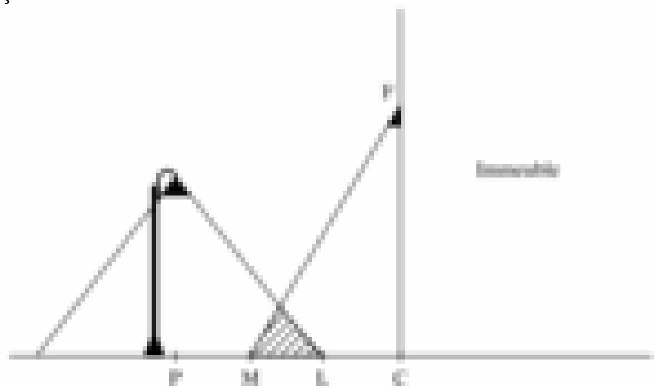
Le triangle ACD est isocèle rectangle en D donc $\widehat{CAD} = \dfrac{\pi}{4}$.

Par conséquent, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

Le triangle ABC est isocèle en A donc $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi - \widehat{BAC}}{2} = \dfrac{\pi - \dfrac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{\dfrac{3\pi}{4}}{2} = \dfrac{3\pi}{8}$.

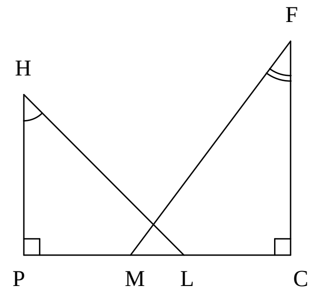
VI.

On s'intéresse à la zone au sol qui est éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.



Ne rien écrire sur le schéma.

On réalise la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle, pour modéliser la situation :



Ne rien écrire sur la figure.

On dispose des données suivantes : $PC = 5{,}5$ m ; $CF = 5$ m ; $HP = 4$ m ; $\widehat{MFC} = 33°$; $\widehat{PHL} = 40°$.

1°) Calculer la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière.
Donner l'expression exacte puis la valeur arrondie au centimètre.

$LM = 5 \times \tan 33° + 4 \times \tan 40° - 5{,}5$ m (expression exacte)

$LM \approx 1{,}10$ m (valeur arrondie au centième)

$LM = PL + MC - PC$

On trouve $LM = 5 \times \tan 33° + 4 \times \tan 40° - 5{,}5$ m

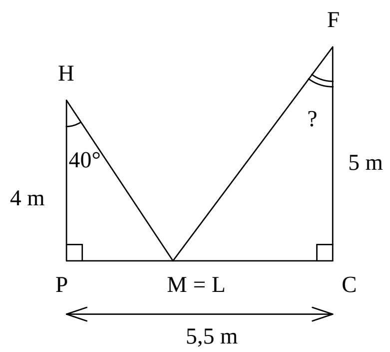
Avec la calculatrice, on trouve : $LM = 1{,}10343649...$ m.

2°) On effectue des réglages du spot situé en F afin que les points M et L soient confondus.
Déterminer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CFM}$. On arrondira la réponse au degré.

$\widehat{CFM} \approx 23°$ (valeur arrondie à l'unité)

Le point L reste fixe. Le point M est confondu avec L grâce au nouveau réglage du spot.

On se place donc dans le cas où L et M sont confondus.



Dans ce cas, on a : $\tan \widehat{CFM} = \dfrac{CM}{CF}$.

$PL = 4\tan 40°$ donc $CM = 5,5 - 4\tan 40°$.

Donc $\tan \widehat{CFM} = \dfrac{5,5 - 4\tan 40°}{5}$

Avec la calculatrice, on trouve : $\widehat{CFM} = 23,2057960...°$.

Sur la calculatrice, on doit taper toute l'expression du numérateur de sorte que l'on ait l'affichage suivant :

Arctan((5.5 – 4 ∗ tan 40°)/5).