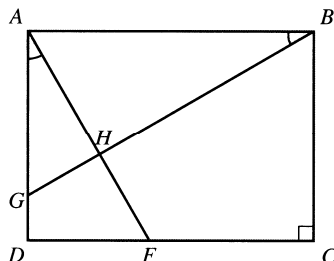


## Géométrie élémentaire

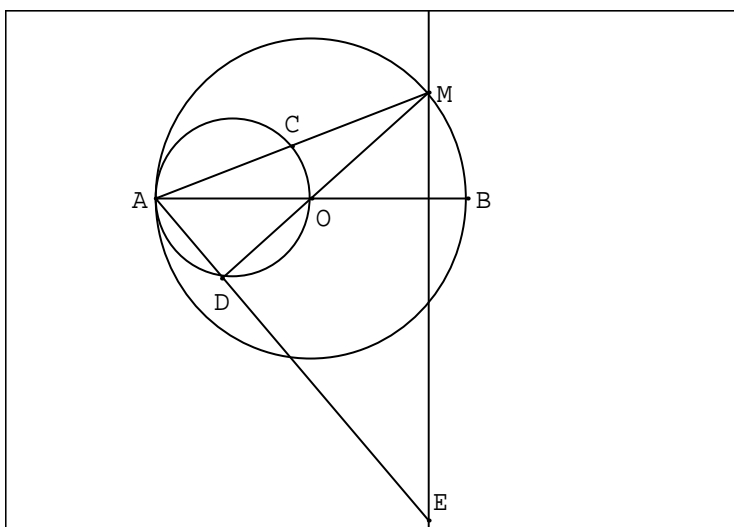
### Exercice 1 :

ABCD est un rectangle tel que  $\widehat{DAF} = \widehat{ABG}$ .



- 1) Prouver que  $\widehat{FAB} + \widehat{ABG} = 90^\circ$ .
- 2) En déduire que les droites (AF) et (BG) sont perpendiculaires.
- 3) Démontrer que le cercle de diamètre [GF] passe par H et D.

### Exercice 2 :



$\Gamma$  est un cercle de centre O de diamètre [AB].  
 $\Gamma'$  est le cercle de diamètre [AO].

M est un point de  $\Gamma$  distinct de A et de B.

Les droites (MA) et (MO) recoupent  $\Gamma'$  respectivement en C et D.

On trace par M la droite d perpendiculaire à (AB) qui coupe (AD) en E.

- 1) Que représente O pour le triangle AME ? (justifier)
- 2) En déduire que O, C et E sont alignés.

### Exercice 3:

(C) est un cercle de centre O, de rayon 4cm. [OA] et [OB] sont deux rayons perpendiculaires de (C).

(C') est le demi-cercle de diamètre [AB] contenu dans (C).

M est un point de (C') distinct de A, B et O.

La droite (BM) recoupe (C) en N.

- 1) Faire une figure.
- 2) Démontrer que (C') passe par O.
- 3) Quelle est la nature du triangle AMB (justifier) ?
- 4) Pourquoi  $\widehat{ANB} = 45^\circ$  ?
- 5) Déduire des questions précédentes la nature du triangle AMN.

Correction :

Exercice 1 :

1) Dans le rectangle, à l'aide des angles adjacents, on a :

$$\widehat{FAB} + \widehat{DAF} = 90^\circ.$$

Or  $\widehat{DAF} = \widehat{ABG}$ , donc  $\widehat{FAB} + \widehat{ABG} = 90^\circ$ .

2) La somme des mesures des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$ , donc dans ABH ,

$$\widehat{AHB} = 180 - (\widehat{FAB} + \widehat{ABG}) = 180 - 90 = 90^\circ. \text{ D'où le résultat.}$$

3) Un triangle rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre son hypoténuse, donc les triangles GFH et GFD, rectangles respectivement en H et en D, sont inscrits dans le cercle de diamètre [GF].

Exercice 2 :

1) - d est perpendiculaire à (AB), donc (AB) est une hauteur du triangle AME ;

- Le triangle AOD est inscrit dans le cercle  $\Gamma'$  avec un de ses côtés diamètre, il est donc rectangle en D ; O, M et D sont alignés, donc (MD) est perpendiculaire à (AE).

(MD) est une deuxième hauteur de AME.

- Les hauteurs (MD) et (AB) se coupent en O qui est donc l'orthocentre du triangle AME.

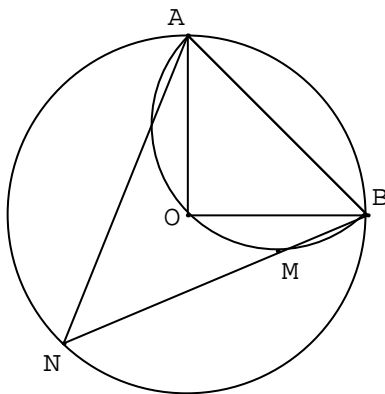
2) (EO) est alors la troisième hauteur de AME, donc (EO) est perpendiculaire à (AB).

Pour les mêmes raisons que AOD, AOC est rectangle en C, donc (OC) est perpendiculaire à (AB).

Ainsi les droites (OC) et (OE) sont toutes deux perpendiculaires à (AB) et passent par le même point O ; Or il n'existe qu'une droite perpendiculaire à une autre et passant par un point donné.

Conclusion, (OC) et (OE) sont confondues, c'est-à-dire que les points O, C et E sont alignés.

Exercice 3 :



2) AOB est un triangle rectangle en O et (C') a pour diamètre [AB].

Prop. : Le cercle circonscrit d'un triangle rectangle a pour diamètre l'hypoténuse de ce triangle.

Donc (C') est circonscrit à AOB, i.e. O est sur (C').

3) M est un point du demi-cercle de diamètre [AB].

Prop. : Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre un de ses côtés, alors il est rectangle.

Donc le triangle AMB est rectangle en M.

4)  $\widehat{ANB}$  est un angle inscrit dans (C) et  $\widehat{AOB}$  est l'angle au centre associé.

Prop. : un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre associé.

$$\text{Donc } \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{90}{2} = 45^\circ.$$

5)  $\widehat{AMN} = \widehat{AMB} = 90^\circ$  (voir 3) ,  $\widehat{ANM} = \widehat{ANB} = 45^\circ$ .

La somme des angles d'un triangle faisant  $180^\circ$ , on a alors  $\widehat{NAM} = 45^\circ$ .

Le triangle AMN a un angle droit et deux angles égaux, il est donc rectangle isocèle en M.