1$^{\text{ère}}$ S

Valeur absolue (2)

Plan :

Nous avons donné dans le chapitre sur la valeur absolue (1) la définition de la valeur absolue d'un réel comme distance à 0. Dans ce chapitre, nous allons donner des propriétés de la valeur absolue.

La notation de la valeur absolue ne sera toujours pas donnée dans ce chapitre ; il faudra attendre le prochain chapitre.

I. Valeur absolue d'un réel et de son opposé

1°) Propriété

Les valeurs absolues d'un réel et de son opposé sont égales.

2°) Démonstration

Un réel et son opposé sont à égale distance de 0 (illustration graphique évidente).

3°) Traduction

Pour tout réel x, on a :

valeur absolue de x = valeur absolue de l'opposé de x

valeur absolue de x = valeur absolue de $-x$

4°) Exemple

valeur absolue de $3 =$ valeur absolue de -3 $(=3)$

II. Égalité de deux valeurs absolues

1°) Propriété

Deux réels ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

Il s'agit d'une équivalence logique.

2°) Démonstration

La démonstration est évidente. On s'appuie sur la définition de la valeur absolue comme distance à 0.

3°) Traduction

valeur absolue de x = valeur absolue de y si et seulement si $x = y$ ou $x = -y$

4°) Utilisation

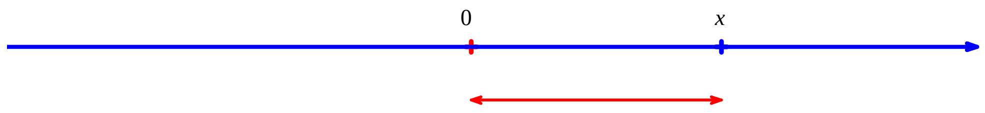
Cette propriété sera utilisée plus tard.

III. Expression de la valeur absolue d'un réel suivant son signe

1°) Démonstration

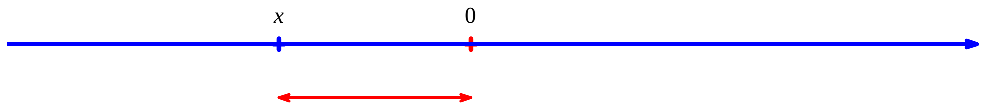
x est un réel quelconque.

• 1[er] cas : x est positif ou nul



valeur absolue de x = distance entre 0 et $x = x - 0 = x$

• 2[e] cas : x est négatif ou nul



valeur absolue de x = distance entre 0 et $x = 0 - x = -x$ = opposé de x

2°) Propriété

Soit x un réel quelconque.

• Si x est positif ou nul, alors la valeur absolue de x est égale à x.

• Si x est négatif ou nul, alors la valeur absolue de x est égale à l'opposé de x (c'est-à-dire $-x$).

• La valeur absolue d'un réel positif ou nul est égale à ce réel.

• La valeur absolue d'un réel négatif ou nul est égale à son opposé.

Soit x un réel quelconque.

• Si x est positif ou nul, alors valeur absolue$(x) = x$.

• Si x est négatif ou nul, alors valeur absolue(x) = opposé de $x = -x$.

3°) Exemple d'application

Donner la valeur absolue de $\pi - 3$, $1 - \pi$, $2\pi + 5$, $-2 - 3\pi$.

Méthode générale :

On regarde le signe de chaque expression.

Pour les expressions $\pi - 3$ et $1 - \pi$ dont le signe n'est pas évident, on part du fait, supposé connu, que $\pi = 3{,}1415...$.

• Pour déterminer la valeur absolue de $\pi - 3$, on doit connaître le signe de $\pi - 3$.

On a : $\pi > 3$ donc $\pi - 3$ est strictement positif (c'est-à-dire $\pi - 3 > 0$).

Par conséquent, la valeur absolue de $\pi - 3$ est égale à $\pi - 3$.

On écrit l'égalité valeur absolue$\left(\pi - 3\right) = \pi - 3$.

• Pour déterminer la valeur absolue de $1 - \pi$, on doit connaître le signe de $1 - \pi$.

On a : $1 < \pi$ donc $1 - \pi$ est strictement négatif (c'est-à-dire $1 - \pi < 0$).

Par conséquent, la valeur absolue de $1 - \pi$ est égale à l'opposé de $1 - \pi$ c'est-à-dire $-\left(1 - \pi\right) = \pi - 1$.

On écrit l'égalité valeur absolue$\left(1 - \pi\right) = \pi - 1$.

Pour les expressions $2\pi + 5$ et $-2 - 3\pi$, le signe est évident. On donne juste une petite explication.

• $2\pi + 5$ est strictement positif de manière évidente (c'est-à-dire $2\pi + 5 > 0$).

Par conséquent, la valeur absolue de $2\pi + 5$ est égale à $2\pi + 5$.

On écrit l'égalité valeur absolue$\left(2\pi + 5\right) = 2\pi + 5$.

• $-2 - 3\pi$ est strictement négatif de manière évidente (c'est-à-dire $-2 - 3\pi < 0$).

Par conséquent, la valeur absolue de $-2 - 3\pi$ est égale à l'opposé de $-2 - 3\pi$ c'est-à-dire $-\left(-2 - 3\pi\right) = 2 + 3\pi$.

On écrit l'égalité valeur absolue$\left(-2 - 3\pi\right) = 2 + 3\pi$.

4°) Écriture de la valeur absolue d'une expression (exemple)

Pour exprimer la valeur absolue de $x - 2$ où x est un réel quelconque, il faut discuter suivant le signe de $x - 2$.

IV. Racine carrée du carré d'un réel

1°) Rappels sur la racine carrée

• Définition [racine carrée d'un réel positif ou nul] :

Pour tout réel $a \geqslant 0$, il existe un unique réel $x \geqslant 0$ tel que $x^2 = a$.
On l'appelle racine carrée de a et on le note $\sqrt{a}$.

La racine carrée d'un réel positif ou nul x est l'unique réel positif ou nul dont le carré est égal à x.

• Exemples :

La racine carrée de 4 est égale à 2 : $\sqrt{4} = 2$.
La racine carrée de 1 est égale à 1 : $\sqrt{1} = 1$.
La racine carrée de 0 est égale à 0 : $\sqrt{0} = 0$.
La racine carrée de – 1 n'existe pas.

2°) Remarque préliminaire

Étant donné un réel x, la racine carrée de x^2 (c'est-à-dire $\sqrt{x^2}$) existe toujours. En effet, l'expression x^2 est toujours positive ou nulle.

Nous allons simplifier l'expression de $\sqrt{x^2}$ pour x quelconque.

3°) Rappel

• 1er cas : x est positif ou nul

Dans ce cas, $\sqrt{x^2} = x$.

• 2e cas : x est négatif ou nul

Dans ce cas, $\sqrt{x^2} = -x$.

Avec la propriété du **III**, on peut donc énoncer la propriété suivante :

4°) Propriété

Pour tout réel x,

$$\sqrt{x^2} = \text{valeur absolue de } x$$

5°) Exemples

• Simplifier $\sqrt{(1-\pi)^2}$.

$\sqrt{(1-\pi)^2}$ = valeur absolue de $1-\pi = \pi - 1$.

• Simplifier $\sqrt{(x-2)^2}$ où x est un réel quelconque.

$\sqrt{(x-2)^2}$ = valeur absolue de $x-2$

On ne peut pas aller plus loin car on ne connaît pas le signe de $x-2$.

6°) Mise en garde

Il faut se garder d'écrire $\sqrt{x^2} = x$ quand on ne connaît pas le signe de x.
Cette égalité n'est vraie que lorsque x est un réel positif ou nul.

V. La fonction « valeur absolue »

1°) Définition

On appelle fonction « valeur absolue » la fonction f qui à tout réel x associe sa valeur absolue.
On écrit $f : x \mapsto$ valeur absolue de x.

Il s'agit d'une nouvelle fonction de référence.

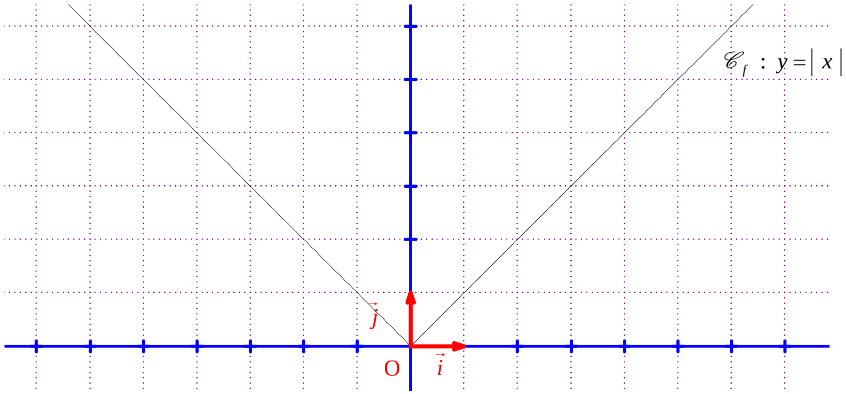
2°) Représentation graphique

On notera que la fonction « valeur absolue » est définie sur $\mathbb{R}$. En effet, on peut calculer la valeur absolue de n'importe quel réel (le résultat est toujours positif ou nul).

On sait que
pour tout réel x positif ou nul, $f(x) = x$;
pour tout réel x négatif ou nul, $f(x)$ = opposé de $x = -x$.

Pour tracer la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère, on trace donc les droites Δ et Δ' d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.
On ne garde que les points de Δ d'abscisse positive ou nulle et que les points de Δ' d'abscisse négative ou nulle.

Ainsi, la représentation graphique de la fonction « valeur absolue » est la réunion de deux demi-droites fermées d'origine O.



On peut tracer la courbe représentative de la fonction « valeur absolue » sur l’écran de la calculatrice.

On dit que la fonction « valeur absolue » est une fonction affine par intervalles et même linéaires par intervalles.

Nous reverrons la fonction « valeur absolue » dans le chapitre sur les fonctions de référence.

3°) Symétrie

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction « valeur absolue » est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées. Cela se retrouve par la propriété « valeur absolue de $-x$ = valeur absolue de x ».

On dit que la fonction « valeur absolue » est **paire**.