$1^{\text{ère}}$ S

Valeur absolue (1)

Plan :

Présentation du chapitre :

Nous allons étudier une notion importante liée aux réels qui sera utilisée à plusieurs reprises durant l'année.
Il est demandé de ne pas lire pour l'instant les chapitres sur « Valeur absolue (2) » et « Valeur absolue (3) » afin de bien prendre le temps d'assimiler ce premier chapitre.

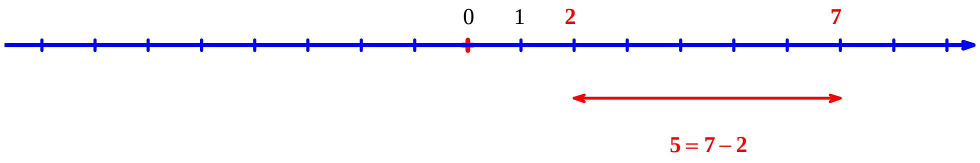
À quoi sert la valeur absolue ?

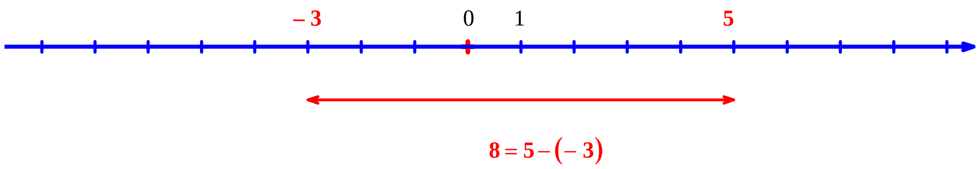
Il s'agit d'une notion qui permet d'exprimer commodément la distance de deux réels et donc extrêmement utile pour définir d'autres notions.

I. Généralités sur la distance entre deux réels

1°) Exemples

On se place sur la « droite réelle ».





Dans les deux cas, on compte le nombre de graduations.
On observe que la distance peut aussi se calculer comme différence.

2°) Définition [distance entre deux réels]

La **distance** entre deux réels quelconques est la différence entre le plus grand et le plus petit.

distance entre deux réels = plus grand réel – plus petit réel

3°) Exercice

Calculer

- la distance entre 1 et 4 : $4-1=3$
- la distance entre 5 et 3 : $5-3=2$
- la distance entre 1 et – 7 : $1-(-7)=1+7=8$
- la distance entre – 4 et – 2 : $-2-(-4)=-2+4=2$

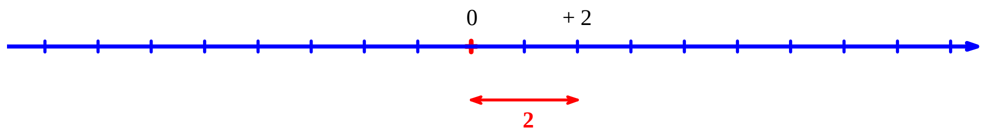
4°) Remarque

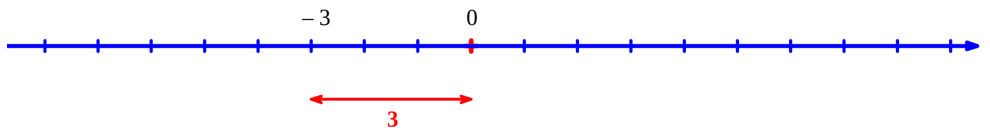
Le résultat d'une distance est toujours positif ou nul.

II. Généralités sur la valeur absolue d'un réel

Dans ce paragraphe, on va s'intéresser à la distance entre 0 (qui est un nombre très important) et un nombre (quelconque).

1°) Exemples





2°) Définition [valeur absolue d'un réel]

La distance entre un réel quelconque x et 0 est appelée **la valeur absolue** de x.

Autrement dit, on retiendra :

valeur absolue de x = distance entre 0 et x

3°) Remarque

L'expression « valeur absolue » est à prendre d'un bloc (sans chercher le sens de chaque terme).

4°) Exercice

Compléter

- valeur absolue de $+2$ = distance entre 0 et 2 $=2-0=2$
- valeur absolue de -3 = distance entre 0 et -3 $=0-(-3)=0+3=3$
- valeur absolue de $-5{,}7$ = distance entre 0 et $-5{,}7$ $=0-(-5{,}7)=5{,}7$
- valeur absolue de $1-\sqrt{2}$ = distance entre 0 et $1-\sqrt{2}$ $=0-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$

Il est possible dans chaque cas de faire une représentation de la droite réelle et de placer le nombre dont on cherche la valeur absolue. Cela est particulièrement important dans le dernier cas.

Dans le dernier cas, il faut observer que $1-\sqrt{2}<0$ puisque $\sqrt{2}=1{,}414...$ et le résultat est donné en valeur exacte. Il est préférable dans ce cas de présenter les calculs en colonnes comme suit :

valeur absolue de $1-\sqrt{2}$ = distance entre 0 et $1-\sqrt{2}$
$$=0-(1-\sqrt{2})$$
$$=-1+\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}-1$$

III. Propriétés immédiates

1°) Propriété 1 [signe du résultat d'une valeur absolue]

● Énoncé

Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.

● Justification

Ceci découle directement de la définition puisqu'une valeur absolue est une distance.

● Retenir

valeur absolue(............) = ...

nombre ou expression de signe quelconque — résultat positif ou nul

2°) Propriété 2 [valeur absolue d'un décimal relatif]

● Énoncé

La valeur absolue d'un décimal relatif est égale à sa partie numérique sans tenir compte du signe.

● Justification

En 5e, on a appris qu'un nombre décimal relatif est formé d'un signe et d'une partie numérique qui correspond à la distance à 0.

● Exemples

+ 4 (signe : + ; partie numérique : 4)

– 3,27 (signe : – ; partie numérique : 3,27)

3°) Propriété 3 [valeur absolue d'un nombre écrit en écriture fractionnaire]

● Énoncé

La valeur absolue d'un nombre écrit en écriture fractionnaire est égale à sa partie numérique sans tenir compte du signe.

● Justification

Il s'agit de la même justification que dans le cas d'un décimal relatif.

4°) Propriété à connaître [cas de nullité d'une valeur absolue]

● Énoncé

La valeur absolue d'un réel est nulle si et seulement si ce réel est égal à 0.

On retient la propriété sous la forme :

valeur absolue de $x = 0$ si et seulement si $x = 0$

● Justification

La propriété découle de la définition.

IV. Remarques diverses

1°) Avertissement

La notation de la valeur absolue, qui a quelque chose de bloquant, sera donnée plus tard (dans le chapitre « Valeur absolue (3) »). Nous allons cependant en parler un tout petit peu dans le paragraphe suivant sur l'utilisation de la calculatrice mais nous ne l'utiliserons pas.

2°) Utilisation de la calculatrice

La calculatrice utilise une notation qui n'est pas utilisée en mathématiques : abs.

● Sur calculatrice TI 83 plus

- appuyer sur la touche $\boxed{\text{math}}$.
- aller dans la section « NUM » ou « NBRE »
- utiliser le premier choix qui se présente : abs(

Sur les modèles anciens, pour donner par exemple la valeur absolue de – 5, on obtient l'affichage abs(– 5.

Sur les modèles les plus récents, pour donner par exemple la valeur absolue de – 5, on obtient l'affichage $\left| -5 \right|$.

Le – 5 est écrit entre deux barres. Il s'agit de la notation mathématique de la valeur absolue. Celle-ci sera étudiée plus tard, mais ne sera pas utilisée dans ce chapitre.
On notera bien que dans la notation $\left| -5 \right|$, il s'agit de deux barres verticales et non de parenthèses.

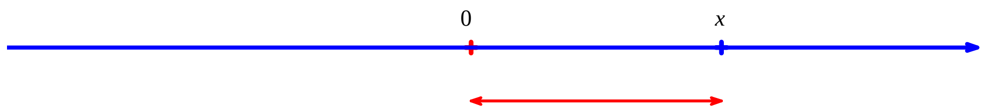
● Casio Graph 35 +

option $\rightarrow$ num $\rightarrow$ abs

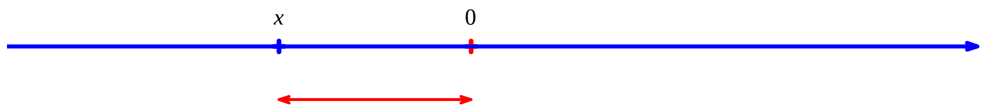
3°) Illustration graphique

On retiendra les images mentales suivantes :

- **$x \geqslant 0$**



- **$x \leqslant 0$**



Résumé du chapitre (à réécrire sur une fiche)

① Définitions

distance entre deux réels = plus grand réel – plus petit réel

valeur absolue d'un réel = distance entre 0 et ce réel

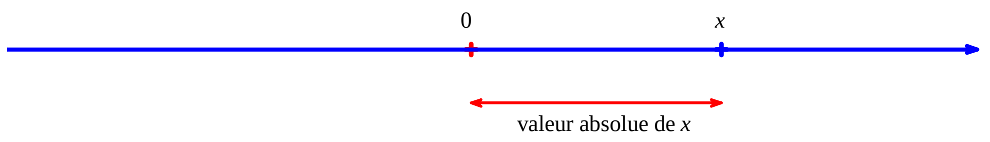
② Exemples

valeur absolue de $10,2 = 10,2$

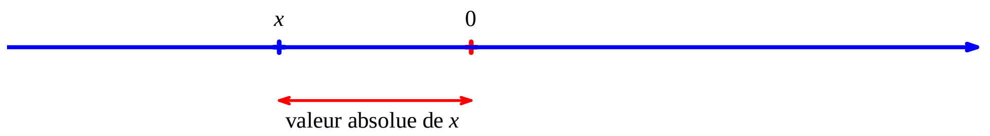
valeur absolue de $-4,57 = 4,57$

③ Images mentales

- $\boldsymbol{x \geqslant 0}$



- $\boldsymbol{x \leqslant 0}$



④ Propriétés immédiates

- Le résultat d'une valeur absolue est toujours positif ou nul.

- La valeur absolue d'un décimal relatif ou d'un nombre écrit en écriture fractionnaire est égale à sa partie numérique sans tenir compte du signe.

- valeur absolue de $x = 0$ si et seulement si $x = 0$

⑤ Calculatrice