1ère S

Exercices sur le produit scalaire (3)

Consigne :

Pour tous les exercices à partir du $\boxed{3}$, il est demandé de faire une figure d'assez grande taille.

$\boxed{1}$ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$.

Calculer $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

$\boxed{2}$ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$.

1°) Exprimer en fonction de k le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ (k est un réel).

2°) Déterminer le réel k tel que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ soient orthogonaux.

On rédigera ainsi :

« $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si …… ».

$\boxed{3}$ Soit ABCD un carré de côté a.

On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].

Faire une figure codée assez grande (prendre, par exemple, 6 cm ou 8 « gros » carreaux pour côté) en adoptant la disposition des points suivante : (AB) « horizontale », A en bas à gauche, B à droite, C et D « au-dessus » de (AB).

Démontrer en utilisant le produit scalaire que (AJ) $\perp$ (DI).

$\boxed{4}$ Soit ABCD un parallélogramme. On pose $\text{AB}=a$ et $\text{AD}=b$.

Faire une figure.

1°) Calculer $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}$ en fonction de a et b.

Indication : Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ en fonction de deux vecteurs bien choisis.

2°) Déterminer la nature (aigu, obtus ou droit) de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ selon les valeurs de a et b.

$\boxed{5}$ Soit ABCD un parallélogramme.

Faire une figure.

Démontrer que l'on a : $\text{AC}^2+\text{BD}^2=2\left(\text{AB}^2+\text{AD}^2\right)$ (identité d'Apollonius).

Indication : Partir du premier membre en écrivant $\text{AC}^2+\text{BD}^2=\overrightarrow{\text{AC}}^2+\overrightarrow{\text{BD}}^2$ et décomposer $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{BD}}$ en fonction de deux vecteurs bien choisis.

Apollonios de Perga ou Apollonius de Perge (vers 262 – vers 190 avant J.-C.) était un géomètre et astronome grec. Il serait originaire de Pergé (actuelle Aksu en Turquie). Il enseigna à Alexandrie et est considéré comme l'une des grandes figures des mathématiques hellénistiques.

$\boxed{6}$ Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a>0$.

On note G le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{AG}}=3\overrightarrow{\text{AB}}+2\overrightarrow{\text{AC}}$.

Faire une figure en prenant (AB) « horizontale », A à gauche de B, C « au-dessus » de (AB).

Placer alors le point G sur la figure.

Calculer $\overrightarrow{\text{AG}}^2$ en fonction de a sans introduire de nouveaux points ; en déduire AG en fonction de a.

On présentera les calculs ainsi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{AG}}^2 &= \left(3\overrightarrow{\text{AB}}+2\overrightarrow{\text{AC}}\right)^2\\ &= \left(3\overrightarrow{\text{AB}}\right)^2+2\left[\left(3\overrightarrow{\text{AB}}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{\text{AC}}\right)\right]+\left(2\overrightarrow{\text{AC}}\right)^2 \text{ (identité de remarquable scalaire)}\\ &= \text{.... (poursuivre en utilisant les propriétés du produit scalaire)}\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Soit ABC un triangle du plan P. On note G son centre de gravité c'est-à-dire le point de concours des médianes (c'est-à-dire des droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé).

On rappelle que G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\text{GA}}+\overrightarrow{\text{GB}}+\overrightarrow{\text{GC}}=\vec{0}$.

1°) Démontrer que pour tout point M du plan P, on a : $\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{MC}}=3\overrightarrow{\text{MG}}$.

2°) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{MC}}\right)\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0$.

On rédigera la recherche de l'ensemble E en utilisant une chaîne d'équivalences selon le modèle suivant :

$\text{M}\in E$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{\text{MA}}+\overrightarrow{\text{MB}}+\overrightarrow{\text{MC}}\right)\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0$

si et seulement si …

si et seulement si …

si et seulement si …

On pourra utiliser le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ à la place du « si et seulement si ».

On conclura ainsi :

« L'ensemble E est … . »

$\boxed{8}$ Soit A, B, C trois points quelconques du plan P tels que B et C soient distincts.

Déterminer et tracer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$.

On rédigera la recherche de l'ensemble E en utilisant une chaîne d'équivalences.

$\boxed{9}$ Soit A et B deux points distincts du plan P.

Déterminer et tracer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=\text{AB}^2$.

On rédigera la recherche de l'ensemble E en utilisant une chaîne d'équivalences.

$\boxed{10}$ Soit A et B deux points distincts du plan P.

1°) On note I et J les points définis par $\overrightarrow{\text{IA}}-2\overrightarrow{\text{IB}}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{\text{JA}}+2\overrightarrow{\text{JB}}=\vec{0}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{\text{AI}}$ et $\overrightarrow{\text{AJ}}$ en fonction de $\overrightarrow{\text{AB}}$.

b) Démontrer que pour tout point M du plan P, on a $\overrightarrow{\text{MA}}-2\overrightarrow{\text{MB}}=-\overrightarrow{\text{MI}}$ et $\overrightarrow{\text{MA}}+2\overrightarrow{\text{MB}}=3\overrightarrow{\text{MJ}}$.

2°) Déterminer et tracer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\text{MA}^2-4\text{MB}^2=0$.

Indications :
- introduire des carrés scalaires ;
- factoriser en utilisant des identités remarquables scalaires ;
- introduire les points I et J.

$\boxed{\textbf{11}}$ Soit $\vec{u}$ un vecteur tel que $\|\vec{u}\| = 3$.

Calculer $\left(2\vec{u}\right)^2$.

Corrigé

Question de Diane Schneider le 29-3-2016 :

Quand faut-il privilégier la méthode des projetés orthogonaux et la méthode de Chasles dans les produits scalaires ?

$\boxed{1}$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{6}$

Solution détaillée :

$\|\vec{u}\|=1$

$\|\vec{v}\|=3$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=-2$

Calculons $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

On va utiliser la propriété du produit scalaire d'un vecteur.
Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme.

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ est le carré de la norme de $\vec{u}+\vec{v}$.

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$ est le carré scalaire du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$

$=\vec{u}^2+2\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+\vec{v}^2$ (on applique l'identité remarquable scalaire)

$=\|\vec{u}\|^2+2\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+\|\vec{v}\|^2$

$=1^2+2\times(-2)+3^2$

$=1-4+9$

$=6$

Donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{6}$.

Solution fausse : $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

Cette égalité est fausse ; la norme d'une somme n'est pas égale à la somme des normes.

$\boxed{2}$ On traduit l'orthogonalité des deux vecteurs en disant que le produit scalaire est nul.
On trouve : $k=-3$.

Solution détaillée :

$\|\vec{u}\|=5$

$\|\vec{v}\|=4$

$\vec{u}\bullet\vec{v}=2$

Déterminons k tel que les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ soient orthogonaux.

On raisonne par chaîne d'équivalences.

On peut remplacer le « si et seulement si » par la double flèche ⇔.

$\vec{u}+\vec{v}$ et $2\vec{u}+k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(2\vec{u}+k\vec{v}\right)=0$ *

si et seulement si $\vec{u}\bullet\left(2\vec{u}\right)+\vec{u}\bullet\left(k\vec{v}\right)+\vec{v}\bullet\left(2\vec{u}\right)+\vec{v}\bullet\left(k\vec{v}\right)=0$ **

si et seulement si $2\left(\vec{u}\bullet\vec{u}\right)+k\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+2\left(\vec{v}\bullet\vec{u}\right)+k\left(\vec{v}\bullet\vec{v}\right)=0$

si et seulement si $2\vec{u}^2+k\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+2\left(\vec{u}\bullet\vec{v}\right)+k\vec{v}^2=0$

si et seulement si $2\times25+2k+4+16k=0$

si et seulement si $18k=-54$

si et seulement si $k=-3$

* Les parenthèses sont obligatoires : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(2\vec{u}+k\vec{v}\right)=0$.

parenthèses obligatoires

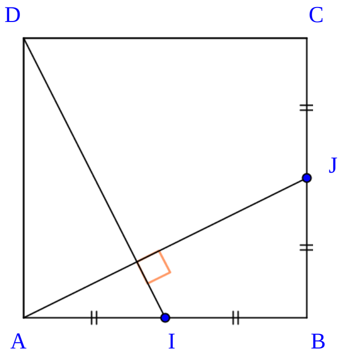
Il n'y a pas véritablement de priorité.

** On développe en utilisant la bilinéarité du produit scalaire.

$\boxed{3}$ On calcule $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}$ en décomposant les vecteurs. On montre que ce produit scalaire est nul.

Solution détaillée :

ABCD : carré de côté *a*
I : milieu de [AB]
J : milieu de [BC]



Démontrons que (AJ) ⊥ (DI).

Il s'agit d'un exercice de produit scalaire littéral. On n'a pas de valeurs numériques.

On va calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}$ et démontrer qu'il est égal à 0.

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\right)$ (on utilise la relation de Chasles pour décomposer les vecteurs)

on rajoute des parenthèses

$=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}}_{0}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{DA}+\underbrace{\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{AI}}_{0}$ (« double distributivité » scalaire)

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux   car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux

$=\text{AB}\times\text{AI}-\text{BJ}\times\text{DA}$

car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens   car les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires de sens contraires

$=a\times\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\times a$
$=0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont orthogonaux.
Par suite, (AJ) ⊥ (DI).

Étude d'une solution fausse :

Le projeté orthogonal du point J sur (AB) est le point B.
Le projeté orthogonal du point D sur (AB) est le point A.

Cette méthode n'est pas applicable car la droite (AB) ne supporte aucun des deux vecteurs qui interviennent dans le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}$.

Autre façon fausse dans la même veine :

On ne peut pas projeter sur $\overrightarrow{AJ}$ sur la droite (AB) et $\overrightarrow{DI}$ sur la droite (AD).

Au niveau de la 1ère, il n'y a pas de moyen plus simple que le produit scalaire de démontrer ce résultat.

L'outil du produit scalaire se montre particulièrement efficace pour résoudre ce type de problème.
On utilise vraiment le produit scalaire comme un outil.

L'idée générale de la décomposition :
On remplace un produit scalaire par un autre produit scalaire qui lui est égal, plus compliqué que l'on développe ensuite par bilinéarité (en « distribuant »).
À aucun moment on ne remplace les vecteurs par des nombres (leurs normes).
Comme souvent en mathématiques, on est obligé de compliquer pour obtenir quelque chose de plus simple.

On retiendra la structure :

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}=\left(\overrightarrow{...}+\overrightarrow{...}\right)\cdot\left(\overrightarrow{...}+\overrightarrow{...}\right)$ (ajout de parenthèses)
$=\overrightarrow{...}\cdot\overrightarrow{...}+\overrightarrow{...}\cdot\overrightarrow{...}+\overrightarrow{...}\cdot\overrightarrow{...}+\overrightarrow{...}\cdot\overrightarrow{...}$

Difficulté pour les élèves : 3 opérations qui se mêlent (le produit scalaire, l'addition et la multiplication par un réel), pas évident pour les élèves (cf. $\boxed{5}$).

Retenir la structure du $\boxed{5}$:

$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{DI}=\left(\overrightarrow{....}+\overrightarrow{....}\right)\cdot\left(\overrightarrow{....}+\overrightarrow{....}\right)$ (on décompose chaque vecteur, on reste en vecteurs)
$=\overrightarrow{....}\cdot\overrightarrow{....}+\overrightarrow{....}\cdot\overrightarrow{....}+\overrightarrow{....}\cdot\overrightarrow{....}+\overrightarrow{....}\cdot\overrightarrow{....}$ (on développe ; on reste en vecteurs)
$=...+...+...+...$ (on calcule chaque produit scalaire)

Question de Diane Schneider le 29-3-2016 :

Il est possible de calculer chaque produit scalaire séparément.
On peut calculer chaque produit scalaire séparément.

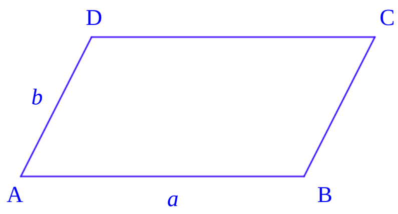
Il est possible de calculer chaque produit scalaire séparément.
On peut calculer chaque produit scalaire séparément.

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = b^2 - a^2$

Solution détaillée :

ABCD : parallélogramme
$AB = a$
$AD = b$

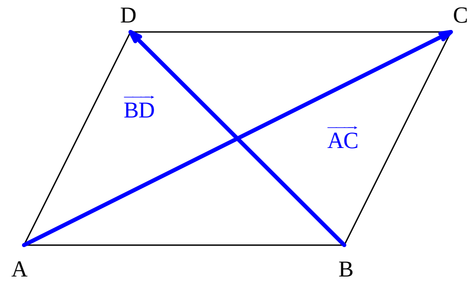
On commence par faire une figure. La disposition à adopter est : (AB) « horizontale », A « à gauche » de B, C et D « au-dessus » de (AB).



Il s'agit d'un exercice de produit scalaire littéral. On n'a pas de valeurs numériques.

On ne place pas le point O, centre du parallélogramme car il n'intervient pas directement dans l'exercice.

Il n'est pas utile de représenter les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sur la figure (mais on peut le faire si on le désire).



1°) **Calculons $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}$ en fonction de *a* et de *b*.**

On n'est pas obligé de tracer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sur la figure.

Méthode : On décompose les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ à l'aide de la relation de Chasles.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d'après la règle du parallélogramme.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$

On utilise l'égalité du parallélogramme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2$ (On applique l'identité remarquable scalaire $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} - \vec{v}\right)$)

$= AD^2 - AB^2$ (En effet, $\overrightarrow{AD}^2 = AD^2$ et $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$)

$= b^2 - a^2$

Le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AD}$ est égal au carré de la distance AD.

2°) Déterminons la nature de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ selon les valeurs de *a* et *b*.

Il est conseillé de représenter les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sur la figure puis de faire les gestes avec les doigts.

L'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ correspond à l'angle $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{COD}$ où O désigne le centre du parallélogramme (angles opposés par le sommet donc de même mesure).

On discute suivant le signe de $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}$ c'est-à-dire de $b^2 - a^2$ qui est le même que celui de $b - a$ car *a* et *b* sont strictement positifs.

1^{er} cas : $a < b$
Dans ce cas, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} > 0$.
Par conséquent, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ est aigu.

2[e] cas : $a > b$

Dans ce cas, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} < 0$.

Par conséquent, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ est obtus.

3[e] cas : $a = b$

Dans ce cas, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$.

Par conséquent, l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ est droit.

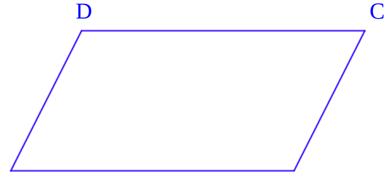
Les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Dans ce cas, ABCD est un losange.

On peut illustrer les différents cas en faisant des figures.

$\boxed{5}$ Égalité d'Apollonius

ABCD : parallélogramme

Faire une figure (on prendra la droite (AB) « horizontale », A à gauche de B, C et D « au-dessus » de (AB), l'angle $\widehat{BAD}$ aigu).



Démontrons que $AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$.

Il s'agit d'un exercice de produit scalaire littéral. On n'a pas de valeurs numériques.

Même méthode que dans l'exercice précédent.

Idée : $AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = ...$

On développe en utilisant les identités remarquables scalaires.

Il y a trois identités remarquables scalaires (à savoir par cœur) :

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right) + \vec{v}^2$$
$$\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 - 2\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right) + \vec{v}^2$$
$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \bullet \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

On va utiliser uniquement les deux premières identités remarquables scalaires.

$AC^2 + BD^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)^2$ (car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d'après la règle du parallélogramme)

$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 + \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2$ (car $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ABCD étant un parallélogramme)

$= \overrightarrow{AB}^2 + \cancel{2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \cancel{2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{AD}^2$

$= 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AD}^2$

$= 2AB^2 + 2AD^2$

$= 2\left(AB^2 + AD^2\right)$

Le résultat de l'égalité d'Apollonius peut s'énoncer ainsi en français :

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs de tous les côtés.

Quelques commentaires importants :

- Il s'agit d'une relation métrique dans un parallélogramme.

- Le produit scalaire est un très bon moyen d'établir des relations métriques.

- Cette relation métrique est très facile à démontrer pour un rectangle (on utilise uniquement le théorème de Pythagore) mais est beaucoup moins facile à démontrer pour un parallélogramme. Il faut utiliser le produit scalaire.

$\boxed{6}$ Calcul de longueur

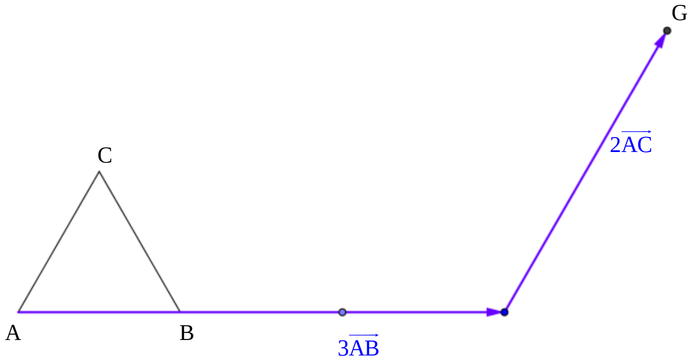
Cet exercice montre l'utilisation de l'outil produit scalaire pour calculer une longueur.

Par égalité de position, on a : $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$; on calcule $\overrightarrow{AG}^2$; on trouve : $AG = a\sqrt{19}$.

Solution détaillée :

ABC : triangle équilatéral de côté a

$\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$



• Calculons $\overrightarrow{AG}^2$ (carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AG}$) en fonction de a.

On ne peut pas écrire $AG = 3AB + 2AC$ (cf. explication ci-dessous).
Par contre, on va pouvoir utiliser les carrés scalaires en écrivant $AG^2 = \overrightarrow{AG}^2$.

Dans l'énoncé, on nous dit : « On note G le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. »

On nous demande de calculer $\overrightarrow{AG}^2$ en fonction de a.

Je pensais alors simplement transforme l'expression donnée dans l'énoncé en la mettant au carré :
$\overrightarrow{AG}^2 = \left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)^2$ puis développer en utilisant l'identité scalaire.
Ainsi on obtenait un résultat.

On va « mettre au carré » le vecteur $\overrightarrow{AG}$; autrement dit, on calcule le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AG}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG}^2 &= \left(3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= \left(3\overrightarrow{AB}\right)^2 + 2\times\left[\left(3\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{AC}\right)\right] + \left(2\overrightarrow{AC}\right)^2 \quad \text{(identité remarquable scalaire*)} \\
&= 9\overrightarrow{AB}^2 + 2\times 6\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) + 4\overrightarrow{AC}^2 \quad \text{(propriété du produit scalaire**)} \\
&= 9AB^2 + 12\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) + 4AC^2 \\
&= 9AB^2 + 12\times AB\times AC\times\cos 60° + 4AC^2 \quad \text{ou} \quad = 9AB^2 + 12\times AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3} + 4AC^2 \quad \text{***} \\
&= 9a^2 + 12a^2\times\frac{1}{2} + 4a^2 \\
&= 19a^2
\end{aligned}$$

* $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

** $\left(k\vec{u}\right)\cdot\left(k'\vec{v}\right) = kk'\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$ et $\left(k\vec{u}\right)^2 = k^2\vec{u}^2$ (propriété qui découle de l'égalité précédente)

*** Il faut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ comme un produit scalaire normal. On le calcule ici en utilisant la définition du produit scalaire (expression trigonométrique).
Comme ABC est équilatéral, tous ses angles mesurent 60°.

• Déduisons-en AG en fonction de a.

$AG = a\sqrt{19}$ (car $a > 0$)

• On peut vérifier que le résultat est cohérent avec celui de la figure en mesurant la longueur AG avec la règle graduée.

• Cet exercice montre l'intérêt du produit scalaire pour calculer des distances. Le produit scalaire est un outil de calcul (de longueurs et d'angles).

Exercice à savoir refaire sans la question intermédiaire sous la forme suivante :

Calculer AG en fonction de a.

Solution tentante mais complètement fausse :

$\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|2\overrightarrow{AC}\right\| = 3\left\|\overrightarrow{AB}\right\| + 2\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 3a + 2a = 5a$

En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, en général, on a : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| \neq \left\|\vec{u}\right\| + \left\|\vec{v}\right\|$.

Les exercices $\boxed{7}$ à $\boxed{\mathbf{10}}$ portent sur la recherche d'ensembles de points définis à l'aide du produit scalaire (il s'agit de recherche de **lieux géométriques**).
Dans tous les cas, on se ramène à un produit scalaire nul.
On reconnaît alors un **lieu géométrique d'orthogonalité de référence**.

$\boxed{7}$ Recherche d'un ensemble de points

1°) **Démontrons que pour tout point M du plan *P*, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.**

On part du membre de gauche et l'on transforme chaque vecteur en introduisant le point G grâce à la relation de Chasles.

$$\begin{aligned}
\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} \quad \text{(relation de Chasles)} \\
&= 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}
\end{aligned}$$

Or G est le centre de gravité du triangle ABC.
L'énoncé rappelle que G est caractérisé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

On en déduit que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

2°) **Déterminons l'ensemble $E = \left\{ M \in P \;/\; \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \right\}$.**

Cette notation se lit : « E est l'ensemble ($E = \{...\}$) des points M du plan P ($M \in P$) tels que (/) $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0$.

Méthode : On transforme l'égalité $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0$ en une égalité équivalente de produit scalaire nul entre deux vecteurs, égalité qui pourra s'interpréter facilement en condition d'orthogonalité entre deux vecteurs.
On utilise les propriétés du produit scalaire.

On fait trois étapes.

1ère partie : réduction de la somme vectorielle

On réduit la somme vectorielle en un seul vecteur.

D'après la question 1°),

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (on n'intercale pas de texte comme « on a » entre le quantificateur et l'égalité)

2e partie : chaîne d'équivalences

On peut utiliser le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ à la place du « si et seulement si ».

Question : Pour résoudre cette question, a-t-on le droit de développer le premier membre ?

[développer c'est-à-dire écrire $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \bullet \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} \bullet \overrightarrow{AB}$]

La réponse est oui mais ça n'a pas d'utilité ! Il faut utiliser le résultat de la question précédente.

Soit M un point quelconque du plan P.

$M \in E$ si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

si et seulement si $\left(3\overrightarrow{MG}\right) \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

si et seulement si $3\left(\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{AB}\right) = 0$ (on applique la règle du cours : $\left(k\vec{u}\right) \bullet \vec{v} = k\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)$)

si et seulement si $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

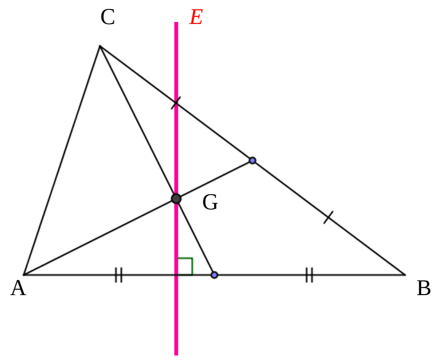
si et seulement si $\overrightarrow{MG} \perp \overrightarrow{AB}$ (on peut aussi s'arrêter à la ligne d'avant)

On ne peut écrire : (MG) $\perp$ (AB).
En effet, lorsque $M = G$, la droite (MG) n'existe pas.

3e partie : conclusion ; identification de l'ensemble

E est la droite passant par G et qui est perpendiculaire à (AB).

[On exprime la conclusion de la manière la plus claire, la plus concise possible, sans parler du point M.]
On fait une figure en prenant la disposition habituelle des sommets d'un triangle quelconque : (AB) horizontale, A à gauche de B et C au-dessus.



On ne fait pas figurer le point M sur la figure.
On marque l'angle droit par un codage.

$\boxed{8}$ Recherche d'un ensemble de points

L'ensemble E est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

Solution détaillée :

A, B, C trois points quelconques tels que $B \neq C$

Déterminons l'ensemble $E = \left\{ M \in P \;/\; \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC} \right\}$.

Méthode : On transforme l'égalité $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AC}$ en une égalité équivalente de produit scalaire nul entre deux vecteurs, égalité qui pourra s'interpréter facilement en condition d'orthogonalité entre deux vecteurs.
On utilise les propriétés du produit scalaire.
On n'utilise pas l'expression trigonométrique du produit scalaire.

On rédige par chaîne d'équivalences.

On peut utiliser le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ à la place du « si et seulement si ».

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ (attention, c'est bien 0 et pas $\vec{0}$; on transpose le membre de droite dans le membre de gauche)

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0$ (propriété $\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} - \vec{w}\right)$)

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 0$ *

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ ($\perp$: symbole d'orthogonalité pour les vecteurs) **

* $\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} = \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ (on peut aussi dire que c'est la forme soustractive de la relation de Chasles)

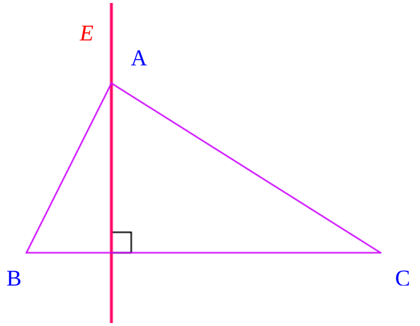
** Cette ligne est facultative.

Conclusion :

E est la droite passant par A perpendiculaire à (BC).

On peut aussi dire que *E* est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

On fait une figure et on trace l'ensemble *E* en rouge.
On fait figurer le nom de l'ensemble *E* à côté.



On fait figurer le codage de l'angle droit.

$\boxed{9}$ **Recherche d'un ensemble de points**

L'ensemble *E* est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Solution détaillée :

A ≠ B
Déterminons l'ensemble $E = \left\{\mathrm{M} \in P \;/\; \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{AB}^2\right\}$.

On peut utiliser le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ à la place du « si et seulement si ».

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{AB}^2$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$

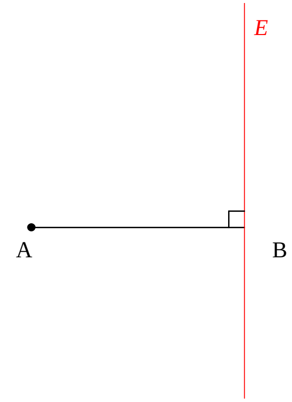
si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$

si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BM}}$

E est la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Faire une figure en prenant (AB) horizontale, A à gauche de B.
Tracer l'ensemble *E* en rouge.
Marquer le codage d'orthogonalité.



On fait figurer le codage de l'angle droit.

$\boxed{10}$ **Recherche d'un ensemble de points**

Solution détaillée :

1°) $\overrightarrow{\mathrm{IA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{IB}} = \vec{0}$ (1) $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{JA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{JB}} = \vec{0}$ (2)

a) **Exprimons $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.**

$(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IA}} - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{\mathrm{IA}} - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

L'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ permet de voir que I est le symétrique de A par rapport à B.

$$(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AJ}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

b)

• Démontrons que $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$.

$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) \quad \text{(relation de Chasles)}$$
$$=-\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}$$
$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$$

• Démontrons que $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MJ}$.

$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right) \quad \text{(relation de Chasles)}$$
$$=3\overrightarrow{MJ}+\underbrace{\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}}_{\vec{0}}$$
$$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MJ}$$

2°) **Déterminons l'ensemble $E=\left\{M \in P \,/\, MA^2-4MB^2=0\right\}$.**

On peut utiliser le symbole d'équivalence $\Leftrightarrow$ à la place du « si et seulement si ».

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$M \in E$ si et seulement si $MA^2-4MB^2=0$

si et seulement si $\overrightarrow{MA}^2-4\overrightarrow{MB}^2=0$ (on passe des distances aux carrés scalaires de vecteurs)

si et seulement si $\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)=0$

si et seulement si $\left(-\overrightarrow{MI}\right)\cdot\left(3\overrightarrow{MJ}\right)=0$

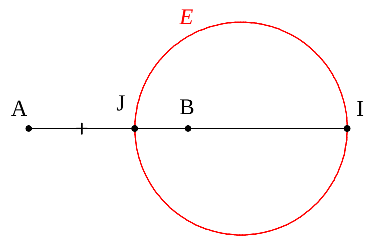
si et seulement si $-3\left(\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}\right)=0$

si et seulement si $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$

(si et seulement si $\overrightarrow{MI}\perp\overrightarrow{MJ}$ ligne facultative)

L'ensemble *E* est le cercle de diamètre [IJ].

Les crochets sont indispensables ici car le mot diamètre est ici employé au sens du mot segment.



Pour construire *E*, on place le milieu de [IJ].

Bilan des exercices $\boxed{7}$ à $\boxed{10}$:

On ne parle pas du point M dans la conclusion.
On répond d'une manière sèche : « *E* est la droite /le cercle … » ou « L'ensemble E est la droite / le cercle … ».
On bannit complètement des formulations idiotes telles que « L'ensemble *E* des points M est … » qui n'ont aucun sens.

$\boxed{\textbf{11}}$

$\left\|\vec{u}\right\|=3$

Calculer $\left(2\vec{u}\right)^2$.

1ère méthode :

$$\left(2\vec{u}\right)^2=4\vec{u}^2$$
$$=4\times\left\|\vec{u}\right\|^2$$
$$=4\times 9$$
$$=36$$

2e méthode :

$$\left(2\vec{u}\right)^2=\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(2\vec{u}\right)$$
$$=4\vec{u}\cdot\vec{u}$$
$$=4\left\|\vec{u}\right\|^2$$
$$=36$$

3e méthode :

$\left\| 2\vec{u} \right\| = 6$

$= 6$

$= 36$