$1^{\text{ère}}$ S

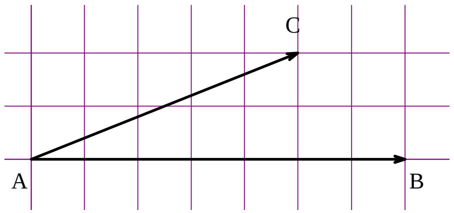
Exercices sur le produit scalaire (2)

Dans tous les exercices, on utilisera la propriété du projeté orthogonal. On rédigera chaque fois afin de justifier les calculs de produits scalaires.

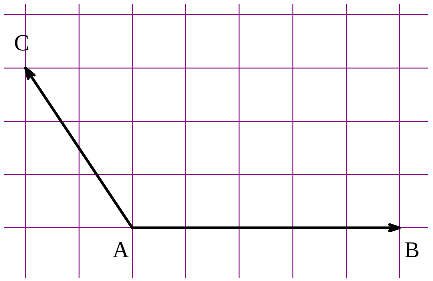
1 L'unité de longueur est ici la longueur d'un carreau de quadrillage.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans les trois cas suivants.
Il est demandé de reproduire et de compléter chaque figure en introduisant les points utiles.

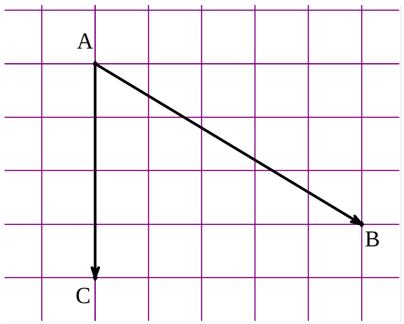
1°) Figure 1



2°) Figure 2



3°) Figure 3



2 Soit ABC un triangle rectangle en A.
On pose $AB = a$ et $AC = b$.
Faire une figure assez grande par produit scalaire de manière à représenter les vecteurs.

Exprimer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ en fonction de *a* et *b*.

3 Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 2$.
On note M le point du segment $[CD]$ tel que $CM = 3$.
Faire une figure assez grande par produit scalaire de manière à représenter les vecteurs.
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

4 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 4$. On note I le milieu de [BC].
Faire une figure assez grande.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

5 Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit D et D' deux droites perpendiculaires à (AB). Ces droites coupent respectivement (AB) en M et N.
Soit P un point quelconque de *D*. La droite (AP) coupe D' en Q.
Faire une figure assez grande.
Comparer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN}$.

6 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [AB], C un point quelconque de $\mathscr{C}$ et *D* un point quelconque de [AB].
La droite passant par *D* et perpendiculaire à (AB) coupe (AC) en E.
Faire une figure assez grande.
En utilisant la propriété du projeté orthogonal, écrire deux produits scalaires égaux à $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.
En déduire que l'on a : $AD \times AB = AE \times AC$.

Corrigé

Rappel de notation : Le produit scalaire de deux vecteurs se note $\vec{u} \bullet \vec{v}$ et non $\vec{u} \times \vec{v}$.

Remarques générales :

Dans tous les exercices on utilise la méthode du projeté orthogonal.

On n'utilise pas de cosinus.

On ne fait pas apparaître d'angles sur les figures.

Modèles de présentation et de rédaction :

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$= AB \times AH$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens

$= ... \times ...$

$= ...$ ← résultat

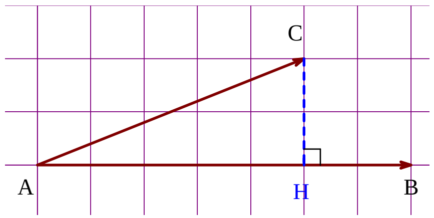
Pas de pronom sauf « on » (ou « nous », pluriel de majesté), pas de « je », « ils », « elles »

ce, cet, cette

$\boxed{1}$

1°) **Figure 1**

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (AB)

$= AB \times AH$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens

$= 7 \times 5$

$= 35$

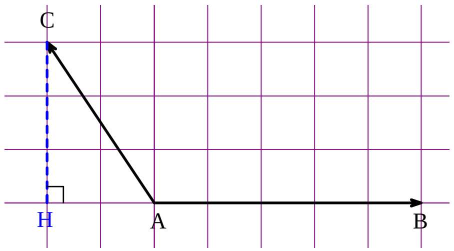
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 7 \times 5 = \mathbf{35}$

↑

étape avec les distances indispensable à écrire

2°) **Figure 2**

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

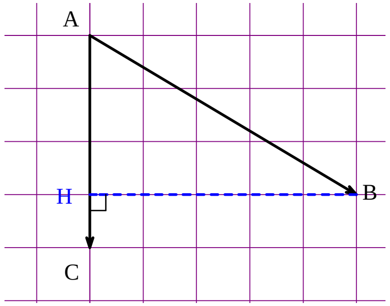


$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AH} = -\ AB \times AH = -\ 5 \times 2 = \mathbf{-\ 10}$

3°) **Figure 3**

Soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Attention, cette fois on projette B orthogonalement sur (AC) et non C orthogonalement sur (AB).
On choisit chaque fois astucieusement le point que l'on va projeter.

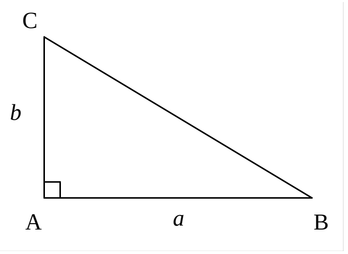


$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AC} = AH \times AC = 4 \times 3 = \mathbf{12}$

$\boxed{2}$

ABC : triangle rectangle en A
AB = a
AC = b

Exprimons $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}$ en fonction de a et b.



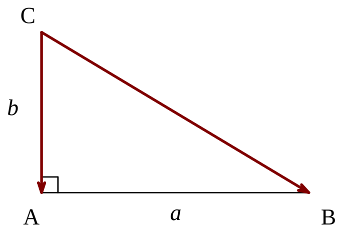
Comme ABC est rectangle en A, on peut dire que A est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BA}$ (car A est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB))

$= \overrightarrow{BA}^2$

$= BA^2$

$= a^2$



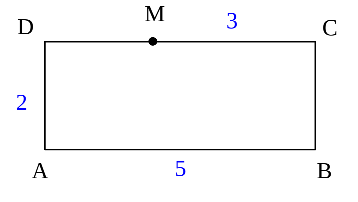
$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CA}$ (car A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC))

$= \overrightarrow{CA}^2$

$= CA^2$

$= b^2$

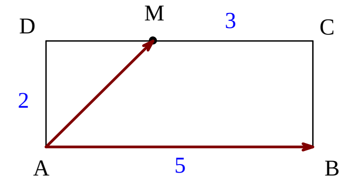
$\boxed{3}$



Refaire une figure pour chaque produit scalaire en faisant apparaître les vecteurs.

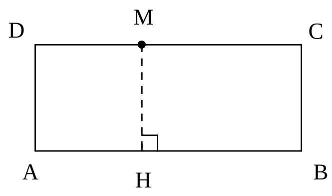
On utilise les propriétés du rectangle pour les angles droits.

● Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB}$.



1ère méthode :

Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB).

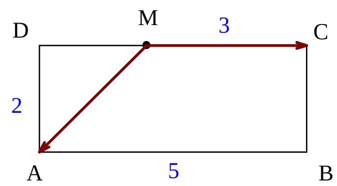


$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 5 = 10$

2e méthode :

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DC}$

• Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.



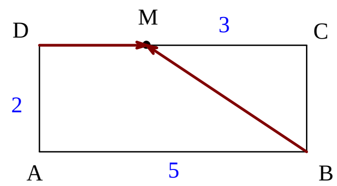
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}$ (car D est le projeté orthogonal de A sur (MC))

$= - MD \times MC$ (car les vecteurs $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires de sens contraires)

$= - 2 \times 3$

$= - 6$

• Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BM}$.



$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CM}$ (car C est le projeté orthogonal de B sur la droite (CD))

$= - DM \times CM$ car les (car les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont colinéaires de sens contraires)

$= - 2 \times 3$

$= - 6$

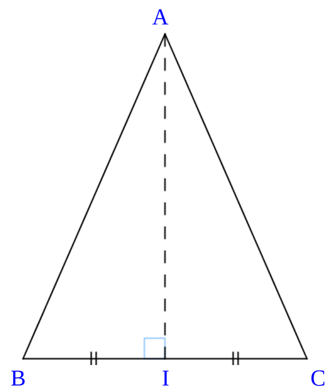
$\boxed{4}$

On utilise la méthode du projeté orthogonal.
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 8$

Solutions détaillée :

Hypothèses :

ABC : triangle isocèle en A
$AB = 5$
$BC = 4$
I : milieu de [BC]



Calculons $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

On ne connaît pas la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ donc on ne va pas utiliser l'expression trigonométrique du produit scalaire (expression de définition).

On va plutôt utiliser la méthode de calcul avec les projetés orthogonaux.

ABC est un triangle isocèle en A et I est le milieu de [BC].
Donc I est aussi le pied de la hauteur issue de A.
Par conséquent, I est le projeté orthogonal de A sur (BC).

Donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens (car I est le milieu de [BC]) donc
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BI \times BC = 2 \times 4 = 8$

Présentation simplifiée :

I est le pied de la hauteur issue de A car ABC est isocèle en A donc I est le projeté orthogonal de A sur (BC).

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}$

$= BI \times BC$ car $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens

$= 2 \times 4$

$= 8$

Remarques :

• Les longueurs de [AB] et [AC] ne nous servent à rien (on ne se sert pas de $AB = AC = 5$).

• On ne peut pas utiliser les longueurs BA et BC car on ne connaît pas l'angle $\widehat{ABC}$.
On pourrait cependant calculer le cosinus de cet angle en se plaçant dans le triangle ABI rectangle en I.
La méthode reviendrait en fait à la méthode par le projeté orthogonal.
On aime donc mieux éviter cette méthode.

$\boxed{5}$

Hypothèses :

A et B : points distincts du plan

$D \perp (AB)$ et $D' \perp (AB)$

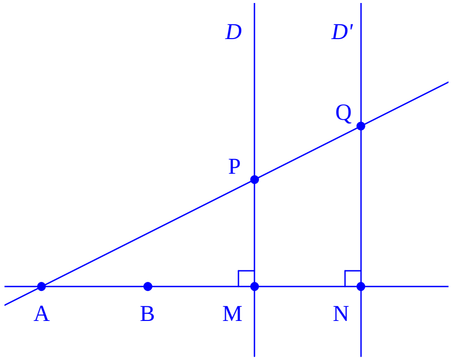
$D \cap (AB) = \{ M \}$

$D' \cap (AB) = \{ N \}$

$P \in D$

$(AP) \cap D' = \{ Q \}$

Faire une figure.
Marquer le codage des angles droits.



Comparons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN}$.

Le verbe « comparer » signifie que nous allons démontrer que les deux produits scalaires sont égaux.
Pour cela, nous allons transformer ces deux produits scalaires.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$ (car le projeté orthogonal de Q sur (AB) est N) *

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN}$ (car le projeté orthogonal de P sur (AB) est M) **

On en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PN}$.

* et ** : Il est possible de dire que le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{MQ}$ sur la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{MN}$ et que le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{PN}$ sur la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Attention, pour les projetés, on dit bien « projeté orthogonal sur (AB) » et non sur (MN) (car on parle de la droite portée par le vecteur que l'on conserve).

On n'écrit pas $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = AB \times MN$ car on ne sait pas si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont de même sens ; cela dépend de la figure.

Autres formulations possibles :

① Le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ a pour projeté orthogonal $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{PN}$ a pour projeté orthogonal $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).

② Le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).
Le vecteur $\overrightarrow{PN}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{MN}$ sur la droite (AB).

$\boxed{6}$

Pour la figure, on prendra le segment [AB] « horizontal », le point A « à gauche » de B et C « au-dessus » de la droite (AB). On n'est pas obligé de placer le centre du cercle.

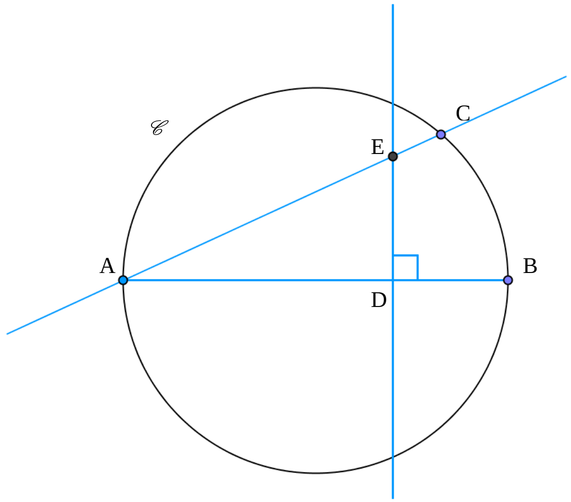
Hypothèses :

$\mathscr{C}$: cercle de diamètre [AB]

$C \in \mathscr{C}$

$D \in [AB]$

La droite passant par D et perpendiculaire à (AB) coupe (AC) en E.



Démontrons que $AD \times AB = AE \times AC$.

Pour cela, nous allons exprimer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AB}$.

1$^{\text{ère}}$ manière :

Par hypothèse, on sait que (DE) $\perp$ (AB) et que $D \in (AB)$.
Donc le point D est le projeté orthogonal de E sur la droite (AB).

Par conséquent, $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{AB}$
$= AD \times AB$ car les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de même sens.

2$^{\text{e}}$ manière :

Par hypothèse, on sait que $C \in \mathscr{C}$ et que le segment [AB] est un diamètre de $\mathscr{C}$, donc le triangle ABC est rectangle en C.

crochets article indéfini

(Attention à l'article « un » et aux crochets pour noter le segment car le mot diamètre est ici pris au sens de « segment » ; de même, il est important de donner la précision ABC rectangle <u>en C</u>).

On en déduit que C est le projeté orthogonal de B sur (AE).

Il faut compléter la figure.

Par conséquent : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AE}$
$= AC \times AE$ car les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et de même sens.

On met en relation les deux expressions obtenues du produit scalaire $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AB}$.

D'après ce qui précède, on a $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AB} = AD \times AB$ et $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{AB} = AE \times AC$.

On en déduit que $AD \times AB = AE \times AC$.

Il s'agit d'une relation métrique, c'est-à-dire d'une égalité concernant des longueurs.

Autre méthode (sans utiliser le produit scalaire, en utilisant les cosinus) :

On exprime le cosinus de l'angle $\widehat{A}$ de deux manières différentes en se plaçant dans deux triangles rectangles.

On écrit :

$$\cos \widehat{EAD} = \frac{AD}{AE}$$

$$\cos \widehat{CAB} = \frac{AC}{AB}$$

Donc $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$ d'où $AD \times AB = AE \times AC$.