1ère S — Exercices sur le produit scalaire (1)

• Pour les résultats des produits scalaires, on attend la valeur exacte.

• Pour les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{5}$ où l'on demande de calculer des produits scalaires, il n'y a pas de rédaction à mettre.

• Pour les autres exercices, on se contentera d'une rédaction succincte.

1 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

4 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 60°$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

5 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 120°$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

6 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 45°$.

Calculer $\|\vec{v}\|$.

7 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{v}\| = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\dfrac{15}{2}$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 120°$.

Calculer $\|\vec{u}\|$.

8 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

Déterminer la mesure en degrés de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

9 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$.

Déterminer la mesure en degrés de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

10 Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. On note I le milieu de $[AB]$.
Faire une figure assez grande.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AB}$.

11 Soit A, B, C trois points tels que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$.
Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

12 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 4$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

13 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraires tels que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 1$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

14 Soit A et B deux points distincts. On note I le milieu de [AB] et J le symétrique de B par rapport à A.
On pose $AB = a$.
Faire une figure assez grande.
Exprimer en fonction de a les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ}$.

15 Soit ABCD un carré de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.
Faire une figure assez grande.
Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants : $p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $p_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $p_3 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$.

Corrigé

Rappel de notation : Le produit scalaire de deux vecteurs se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et non $\vec{u} \times \vec{v}$.

On donne les valeurs exactes (on utilise les valeurs remarquables du cosinus).

On vérifie le signe de chaque produit scalaire calculé en regardant si l'angle géométrique formé par les deux vecteurs est aigu, obtus ou droit.

$\boxed{1}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\\ &= 3 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{4}\\ &= 3 \times \cancel{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{5\pi}{6}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\\ &= 1 \times 3 \times \cos\frac{5\pi}{6}\\ &= 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1ère méthode :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\\ &= 5 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{2}\\ &= 5 \times 4 \times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

2e méthode :

On a $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On en déduit que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (propriété du cours : « Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul »).

$\boxed{4}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 8$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 60°$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\\ &= 8 \times 5 \times \cos 60°\\ &= 8 \times 5 \times \frac{1}{2}\\ &= 20\end{aligned}$$

$\boxed{5}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 7$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 120°$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)\\ &= 7 \times 4 \times \cos 120°\\ &= 7 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= -14\end{aligned}$$

6

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 4$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 45°$.

Calculer $\|\vec{v}\|$.

Par définition, on a $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

On peut donc écrire $4 = \sqrt{2} \times \|\vec{v}\| \times \cos 45°$ soit $4 = \cancel{\sqrt{2}} \times \|\vec{v}\| \times \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$ ce qui donne immédiatement $\|\vec{v}\| = 4$.

7

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{v}\| = 5$, $\vec{u} \bullet \vec{v} = -\dfrac{15}{2}$ et $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 120°$.

Calculer $\|\vec{u}\|$.

On a : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

Donc $-\dfrac{15}{2} = \|\vec{u}\| \times 5 \times \cos 120°$.

Par suite, on a : $-\dfrac{15}{2} = \|\vec{u}\| \times 5 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)$ d'où $15 = \|\vec{u}\| \times 5$.

On en conclut que $\|\vec{u}\| = 3$.

8

$\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 3$

Déterminer la mesure en degrés de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

On a : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

Donc $3 = 2 \times \sqrt{3} \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

On en déduit que $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ soit $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On en conclut que $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 30°$ (valeur remarquable compte tenu du fait que la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est comprise entre 0 et 180).

9

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = 4$, $\vec{u} \bullet \vec{v} = -4$

Déterminer la mesure en degrés de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

On a : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$.

En remplaçant avec les données de l'énoncé, on obtient l'égalité : $-4 = \sqrt{2} \times 4 \times \cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$ donc $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On en conclut $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = 135°$ (valeur remarquable).

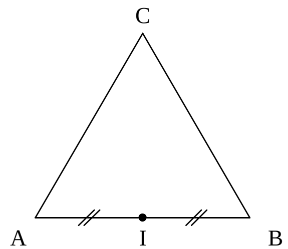
10

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{\text{CA}} \bullet \overrightarrow{\text{CB}}$, $\overrightarrow{\text{AI}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}}$, $\overrightarrow{\text{BI}} \bullet \overrightarrow{\text{BC}}$, $\overrightarrow{\text{CI}} \bullet \overrightarrow{\text{AB}}$.

Il s'agit de calculs de produits scalaires dans un triangle équilatéral.

On commence par faire une figure assez grande.



En général, on ne trace pas les vecteurs sur les figures (parfois, on se contente de repasser uniquement avec le doigt).

Tous les produits scalaires que l'on demande de calculer, à l'exception du dernier, font intervenir des vecteurs ayant la même origine.

☐ $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont la même origine.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} &= CA \times CB \times \cos\widehat{ACB} \\ &= a \times a \times \cos 60° \\ &= a^2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

☐ $\overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont la même origine.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} \bullet \overrightarrow{AC} &= AI \times AC \times \cos\widehat{IAC} \\ &= \frac{a}{2} \times a \times \cos 60° \\ &= \frac{a}{2} \times a \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

[pour effectuer le produit, on peut écrire $\frac{a}{2} \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{2} \times \frac{a}{1} \times \frac{1}{2}$]

☐ $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même origine.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BC} &= BI \times BC \times \cos\widehat{IBC} \\ &= \frac{a}{2} \times a \times \cos 60° \\ &= \frac{a^2}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{a^2}{4}\end{aligned}$$

☐ $\overrightarrow{CI} \bullet \overrightarrow{AB}$

Le triangle ABC est équilatéral et I est le milieu de $[AB]$.
Par suite, (CI) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux et, par conséquent, leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{CI} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$$

On a : $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (formule par le théorème de Pythagore à connaître par cœur).
On n'a pas besoin de cette valeur.

11

Soit A, B, C trois points tels que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 12$.
Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

Il s'agit du calcul d'un angle. On trouve $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Solution détaillée :

$AB = 4$

$AC = 6$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 12$

Déterminons la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

On a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ (on évite l'écriture avec les normes).

D'où $$\begin{aligned}\cos\widehat{BAC} &= \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} \\ &= \frac{12}{4 \times 6} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

La mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ est comprise entre 0 et π.
Donc $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ (car $\frac{\pi}{3}$ est le seul nombre compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à $\frac{1}{2}$).

12

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 4$.
Calculer le produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens donc

$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \\ &= 2 \times 4 \\ &= 8\end{aligned}$$

13

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraires tels que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 1$.

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraire donc

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \\ &= -4 \times 1 \\ &= -4 \end{aligned}$$

14

Cet exercice porte sur des calculs de produits scalaires de vecteurs colinéaires.

Pour la figure, tracer le segment [AB] horizontal avec A à gauche de B.
Placer I en marquant le codage.

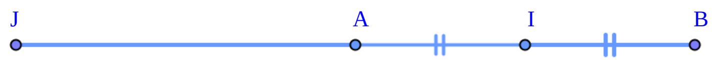
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\dfrac{a^2}{4}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ} = 2a^2$

Solution détaillée :

$AB = a$

I : milieu de [AB]

J : symétrique de B par rapport à A



Cet exercice porte sur le calcul du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires.
On utilise la propriété du cours qui permet d'écrire rapidement l'expression du produit scalaire.

> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques non nuls.
>
> $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{colinéaires de sens contraire} \end{cases}$$

Dans le premier cas, l'angle géométrique formé par les deux vecteurs est 0 ; son cosinus vaut 1.
Dans le deuxième cas, l'angle géométrique formé par les deux vecteurs vaut π ; son cosinus vaut – 1.

• Calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens.

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} &= AB \times AI \\ &= a \times \frac{a}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \quad \text{(pour effectuer le produit, on peut penser } a \times \frac{a}{2} = \frac{a}{1} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}\text{)} \end{aligned}$$

• Calcul de $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires de sens contraires.

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} &= -IA \times IB \\ &= -\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \\ &= -\frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

• Calcul de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ}$

J est le symétrique A par rapport à B donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires de même sens.

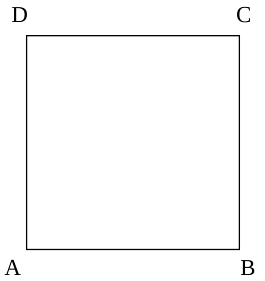
Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ} &= BA \times BJ \\ &= a \times 2a \quad \text{(comme J est le symétrique de B par rapport à A, } BJ = 2a\text{)} \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

15 **Calculs de produits scalaires dans un carré**

Réponses : $p_1 = a^2$; $p_2 = 0$; $p_3 = -a^2$; $p_4 = -a^2$

Solution détaillée :

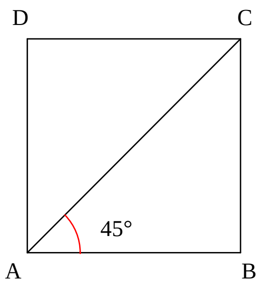


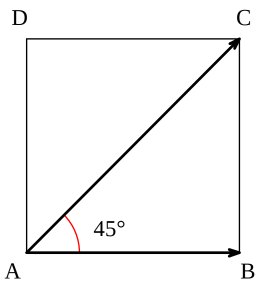
On obtient des nombres que l'on ne cherche pas à interpréter (sauf dans le cas où l'on obtient 0) puisque le résultat d'un produit scalaire n'a pas d'interprétation « concrète » géométrique. C'est un nombre sans interprétation.

> Faire une figure assez grande pour chaque produit scalaire à calculer, de manière à représenter les vecteurs (on le fait dans ce chapitre ; on le fera de moins en moins au cours de l'avancement des chapitres).

• Calcul de $p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$

1$^{\text{ère}}$ méthode : on utilise la définition du produit scalaire de deux vecteurs.





$p_1 = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos \widehat{\text{BAC}}$ (on évite d'écrire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ qui est un peu lourd, même si c'est ce que l'on fait en physique ; on évite aussi d'utiliser des normes)

Or ABCD est un carré donc ABC est rectangle isocèle en B.
Par suite $\widehat{\text{BAC}} = 45°$.
De plus, $\text{AC} = a\sqrt{2}$ (formule donnant la diagonale d'un carré qui se démontre aisément à l'aide du théorème de Pythagore mais qu'il est préférable de connaître par cœur).
D'où :

$$p_1 = a \times a\sqrt{2} \times \cos 45° \quad \left(\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= a^2$$

2$^{\text{e}}$ méthode : on utilise les projetés orthogonaux

ABCD est un carré donc (BA) ⊥ (BC).
B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$p_1 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AB}^2 \quad \text{(carré scalaire du vecteur } \overrightarrow{AB}\text{)}$$
$$= \text{AB}^2$$
$$= a^2$$

N.B. : On pourrait aussi projeter orthogonalement B sur la droite (AC) mais c'est un peu moins facile.

• Calcul de $p_2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$

ABCD est un carré donc (AB) ⊥ (BC).
Par suite, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
Donc $p_2 = 0$ (le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul).

Version maladroite :

On écrit :

$$p_2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC}$$
$$= \text{AB} \times \text{BC} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}\right))$$

L'angle géométrique ($\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}}$) (angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$) est droit car le quadrilatère ABCD est un carré.

Donc

$$p_2 = a \times a \times \cos\frac{\pi}{2}$$
$$= a \times a \times 0$$

• Calcul de $p_3 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CD}$

Comme ABCD est un carré, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et de sens contraires.
Donc $p_3 = -\text{AB} \times \text{CD} = -a^2$.

• Calcul de $p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$

1[ère] méthode :

$$\begin{aligned} p_4 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= DA \times DB \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}}\right) \end{aligned}$$

Il est impératif de mettre le chapeau car il s'agit d'un angle géométrique de vecteurs.
Si l'on ne met pas de chapeau, alors il s'agit d'un angle orienté de vecteurs ce qui n'est pas possible car le plan n'est pas orienté.

$DB = a\sqrt{2}$ (propriété sur la longueur de la diagonale d'un carré qui se démontre aisément à l'aide du théorème de Pythagore mais qu'il est préférable de connaître par cœur)

$$\begin{aligned} p_4 &= a \times a\sqrt{2} \times \cos\frac{3\pi}{4} \\ &= a \times a\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -a^2 \end{aligned}$$

($\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}}\right) = \frac{3\pi}{4}$ obtenu par déplacement des vecteurs à une même origine)

2[e] méthode :

$$\begin{aligned} p_4 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= \left(-\overrightarrow{DA}\right) \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= -\left(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}\right) \\ &= -DA \times DB \times \cos\widehat{ADB} \\ &= -a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= -a^2 \end{aligned}$$

(cette propriété sera vue plus tard)

3[e] méthode :

Cette méthode utilise la propriété du projeté orthogonal qui sera étudiée dans le chapitre « Produit scalaire (3) ».

ABCD est un carré donc (AD) ⊥ (AB).
A est le projeté orthogonal de B sur la droite (AD).

$$\begin{aligned} p_4 &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} \\ &= -AD \times AD \\ &= -a^2 \end{aligned}$$

Pour le calcul de $p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, voici une manière extrêmement maladroite de faire le calcul.

$$\begin{aligned} p_1 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \times \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) \\ &= a \times \sqrt{2a^2} \times \cos\frac{\pi}{4} \\ &= a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\cancel{2}a^2}{\cancel{2}} \\ &= a^2 \end{aligned}$$