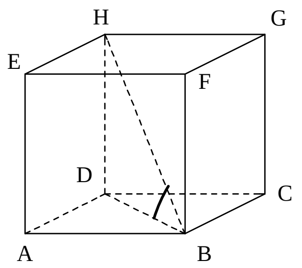
1ère S1

Contrôle du vendredi 5-6-2015 (45 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (2 points)

Soit ABCDEFGH un cube (ne rien écrire sur la figure ci-contre).
Calculer $\sin \widehat{\text{DBH}}$ (valeur exacte).



$\sin \widehat{\text{DBH}} =$............

II. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) a) 2 points ; b) 1 point + 1 point + 1 point)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(2\,;0)$, $\text{C}(2\,;1)$, $\text{D}(1\,;1)$. On note S l'intérieur du carré ABCD. On note également $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.

La courbe $\mathcal{C}$ partage S en deux parties Z_1 et Z_2 :

- Z_1 est la partie du carré située en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ (frontières comprises) ;
- Z_2 est le complémentaire de Z_1 dans le carré.

1°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice puis, à l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction positive (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs), choisir 7, puis rentrer 1 comme borne inférieure et 2 comme borne supérieure, appuyer une fois sur $\boxed{\text{entrer}}$; une valeur approchée s'affiche en bas de l'écran), déterminer la valeur arrondie au millième de l'aire de Z_1.

………………………… (un seul résultat, sans égalité)

Dans la suite, on admettra sans démonstration que la valeur exacte de cette aire est égale au logarithme népérien de 2, noté ln 2.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est une fonction qu'on ne connaît pas en première. Elle sera étudiée l'année prochaine et correspond à la touche $\boxed{\text{ln}}$ de la calculatrice (sur le côté, tout à fait à gauche, troisième touche en partant du bas). La fonction logarithme népérien ne possède pas d'expression algébrique.

2°) Dans cette question, on utilisera la valeur exacte, ln 2, de l'aire de la zone Z_1 et non la valeur approchée.
On choisit 500 points au hasard à l'intérieur du carré ABCD.
Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des points qui appartiennent à Z_1. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

…………………………………… (répondre sans faire de phrase, sans égalité)

Calculer l'amplitude de cet intervalle. Donner le résultat sans écrire d'égalité.

……………………………………

3°) a) Écrire un système de deux inéquations qui caractérise S et un système de deux inéquations qui caractérise Z_1.

$S \begin{cases} \text{.................................} \\ \text{.................................} \end{cases}$ $\qquad Z_1 \begin{cases} \text{.................................} \\ \text{.................................} \end{cases}$

b) On désire réaliser un algorithme permettant d'entrer un entier naturel $n \geqslant 1$, de choisir n points de coordonnées $(x\,;y)$ au hasard dans S et d'afficher en sortie la fréquence de ceux qui sont situés dans Z_1.
Compléter l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i entier naturel allant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[1\,;2]$
  y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[0\,;1]$
  z prend la valeur xy

  Si z ………..

   Alors a prend la valeur …………

  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher ……

Bonus (à ne traiter à la fin que si tout le reste a été fait et s'il reste du temps) :

Réaliser le programme sur calculatrice puis le faire tourner 10 fois pour $n=100$.
Écrire l'échantillon de taille 10 obtenu (c'est-à-dire donner la liste des 10 fréquences obtenues).

………..

III. (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 5x = 0$ (E).

Il n'est pas demandé d'écrire l'ensemble des solutions.
Représenter les points images des solutions des solutions sur le cercle trigonométrique donné ci-dessous.
Donner la liste des solutions dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

………

………

………

………

………

………

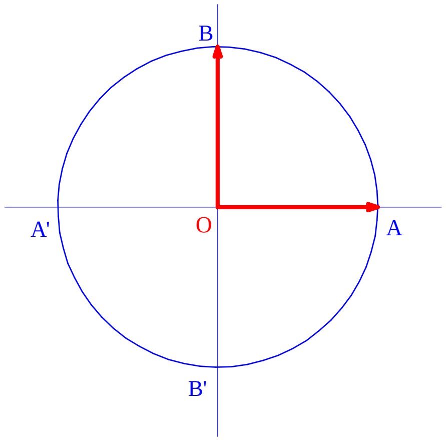
………

………

………

………

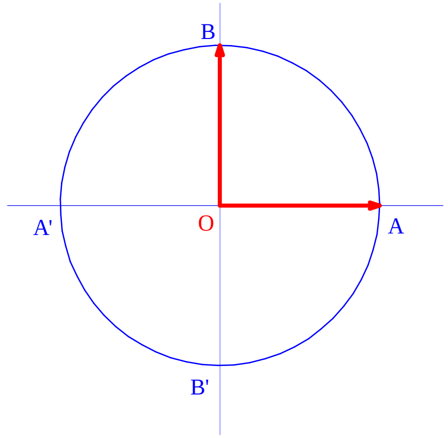
………



IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'inéquation $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ (1).

Faire apparaître sur le cercle trigonométrique ci-dessous l'arc représentant les images des solutions (repasser l'arc en couleur) et donner directement l'ensemble S_1 des solutions sans explication.



$S_1 =$ ……………………………………………………………

2°) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\pi]$ l'inéquation $\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$ (1).

On donnera directement sans explication l'ensemble S_2 des solutions.
Indication : utiliser la question 1°).

$S_2 =$ ……………………………………………………………

V. (2 points)

Pour n entier naturel quelconque, on définit les phrases A : « n est premier » et B : « $2^n - 1$ est premier ».
On admet que l'implication B $\Rightarrow$ A est vraie pour tout entier naturel n mais que l'implication A $\Rightarrow$ B est fausse.

1°) Compléter la phrase suivante :

A est une ………………………………………………………. pour B.

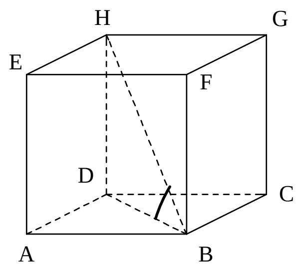
2°) Compléter la phrase suivante en utilisant la locution « il faut que » ou « il suffit que ».

Pour que $2^n - 1$ soit premier, …………………………………….. n soit premier.

Corrigé du contrôle du 5-6-2015

I.

Soit ABCDEFGH un cube (ne rien écrire sur la figure ci-contre).
Calculer $\sin \widehat{\text{DBH}}$ (valeur exacte).



$\sin \widehat{\text{DBH}} =$............

On nomme *a* l'arête du cube.

> J'ai eu quelques questions d'élèves qui m'ont demandé quelle était la longueur de l'arête du cube, si elle était de 1. J'ai répondu qu'elle n'était pas donnée. C'était à l'élève d'avoir l'initiative de lui donner un nom.

Le triangle BDH est rectangle en D.

On a : $\text{BH} = a\sqrt{3}$ et $\text{DH} = a$ (résultat à savoir par cœur : grande diagonale d'un cube ; ce résultat se retrouve aisément grâce au théorème de Pythagore).

Donc $\sin \widehat{\text{DBH}} = \dfrac{\text{DH}}{\text{BH}} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

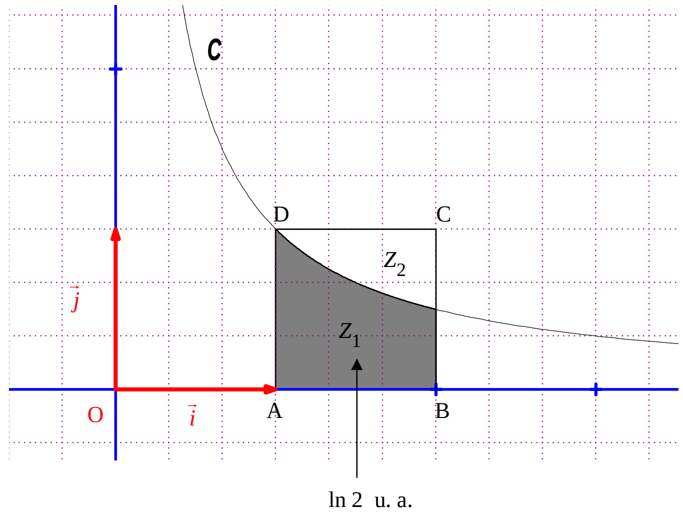
> On peut aussi donner le résultat sous la forme $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ mais ce n'est pas nécessaire.

II.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $\text{A}(1\,;0)$, $\text{B}(2\,;0)$, $\text{C}(2\,;1)$, $\text{D}(1\,;1)$. On note *S* l'intérieur du carré ABCD. On note également $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

La courbe $\mathcal{C}$ partage *S* en deux parties Z_1 et Z_2 :

- Z_1 est la partie du carré située en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ (frontières comprises) ;
- Z_2 est le complémentaire de Z_1 dans le carré.



> Il s'agit d'un exercice sur la méthode de Monte-Carlo.

1°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran de la calculatrice puis, à l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer l'aire sous la courbe d'une fonction positive (faire $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ (calculs), choisir 7, puis rentrer 1 comme borne inférieure et 2 comme borne supérieure, appuyer une fois sur $\boxed{\text{entrer}}$; une valeur approchée s'affiche en bas de l'écran), déterminer la valeur arrondie au millième de l'aire de Z_1.

0,693 (un seul résultat, sans égalité)

Dans la suite, on admettra sans démonstration que la valeur exacte de cette aire est égale au logarithme népérien de 2, noté ln 2.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est une fonction qu'on ne connaît pas en première. Elle sera étudiée l'année prochaine et correspond à la touche $\boxed{\text{ln}}$ de la calculatrice (sur le côté, tout à fait à gauche, troisième touche en partant du bas). La fonction logarithme népérien ne possède pas d'expression algébrique.

2°) Dans cette question, on utilisera la valeur exacte, ln 2, de l'aire de la zone Z_1 et non la valeur approchée.

On choisit 500 points au hasard à l'intérieur du carré ABCD.
Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des points qui appartiennent à Z_1. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

$\left[\dfrac{326}{500}\,;\dfrac{367}{500}\right]$ (répondre sans faire de phrase, sans égalité)

On rentre dans $\text{Y}_1 = \text{binomFRép}(500, \underbrace{\ln 2}_{\text{valeur exacte}}, \text{X})$.

$P(X \leqslant 325) = 0,02141334598...$
$P(X \leqslant 326) = 0,02676762888...$
$P(X \leqslant 366) = 0,97446805572...$
$P(X \leqslant 367) = 0,97984798018...$

Calculer l'amplitude de cet intervalle. Donner le résultat sans écrire d'égalité.

$$\frac{41}{500}$$

3°)

Dans cette question, on n'utilise pas la valeur de l'aire que l'on a trouvée dans la question 1°).

a) Écrire un système de deux inéquations qui caractérise S et un système de deux inéquations qui caractérise Z_1.

$$S \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \qquad Z_1 \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

b) On désire réaliser un algorithme permettant d'entrer un entier naturel $n \geqslant 1$, de choisir n points de coordonnées $(x\,;\,y)$ au hasard dans S et d'afficher en sortie la fréquence de ceux qui sont situés dans Z_1.

Compléter l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i entier naturel allant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[1\,;\,2]$
  y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle $[0\,;\,1]$
  z prend la valeur xy
  Si $z \leqslant 1$
    Alors a prend la valeur $a+1$
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\dfrac{a}{n}$

Commentaire concernant le test :

On peut aisément voir que, pour $1 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$, on a : $y \leqslant \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow xy \leqslant 1$.

On peut aisément programmer cet algorithme sur calculatrice :

```
: Prompt N
: 0 → A
: For(I,1,N)
: NbrAléat + 1 → X      (ou rand + 1 → X)
: NbrAléat → Y
: X∗Y → Z
: If  Z ⩽ 1
: Then
:  A +1 → A
: End
: End
: Disp A/N
```

Commentaire concernant la 3e ligne du programme :

L'instruction de la 3e ligne s'explique par le fait que l'instruction rand ou NbrAléat fournit un réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1[.
Pour obtenir un réel aléatoire dans l'intervalle [1 ; 2[, on ajoute 1.

Bonus (à ne traiter à la fin que si tout le reste a été fait et s'il reste du temps) :

Réaliser le programme sur calculatrice puis le faire tourner 10 fois pour $n = 100$.
Écrire l'échantillon de taille 10 obtenu (c'est-à-dire donner la liste des 10 fréquences obtenues).

0,75 ; 0,76 ; 0,68 ; 0,75 ; 0,75 ; 0,77 ; 0,69 ; 0,72 ; 0,74 ; 0,69

Il pourrait être intéressant de calculer l'étendue de la série des fréquences obtenue.
Autrement dit, j'aurais pu poser la question : « Quelle est l'étendue de la série obtenue ? ».

On peut aisément programme cet algorithme sur calculatrice :

```
: Prompt N
: 0 → A
: For(I,1,N)
: NbrAléat + 1 → X       (ou rand + 1 → X)
: NbrAléat → Y
: X ∗ Y → Z
: If  Z ⩽ 1
: Then
: Pt-Aff(X,Y)
: End
: End
: DispGraph
```

- Faire un réglage de la fenêtre graphique. On peut la définir au début du programme.
- À l'intérieur de la boucle : $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{pgrm}}$ (dessin) 1 : Pt-Aff(X,Y)   ou 1:Pt-On(X,Y)
- À la fin, aller dans E/S et choisir 4 : DispGraph ou AffGraph.

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 5x = 0$ (E).

Il n'est pas demandé d'écrire l'ensemble des solutions.
Représenter les points images des solutions des solutions sur le cercle trigonométrique donné ci-dessous.
Donner la liste des solutions dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

(E) $\Leftrightarrow$ $5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ [il s'agit d'une équation particulière du cours qui donne une seule famille de solutions]

$\Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

On a : $S = \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

On a une seule famille de solutions.

Les solutions de (E) dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ sont : $\frac{\pi}{10}$ (pour $k=0$), $\frac{3\pi}{10}$ (pour $k=1$), $\frac{5\pi}{10}$ (pour $k=2$), $\frac{7\pi}{10}$ (pour $k=3$), $\frac{9\pi}{10}$ (pour $k=4$), $\frac{11\pi}{10}$ (pour $k=5$), $\frac{13\pi}{10}$ (pour $k=6$), $\frac{15\pi}{10}$ (pour $k=7$), $\frac{17\pi}{10}$ (pour $k=8$), $\frac{19\pi}{10}$ (pour $k=9$).

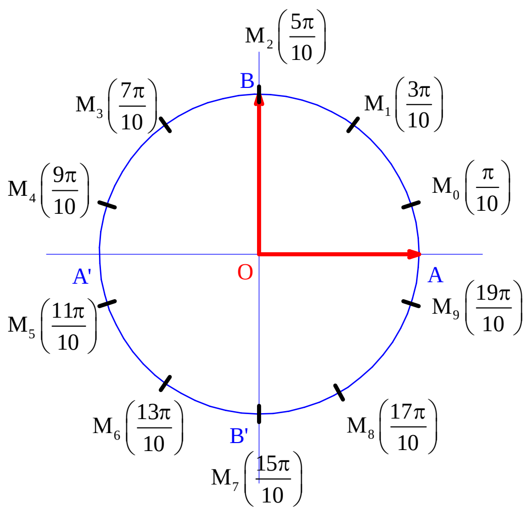
On note M_0, M_1, …, M_9 les points images associés sur le cercle trigonométrique.

Pour placer ces points sur le cercle, on peut éventuellement repasser en degrés toutes les valeurs.

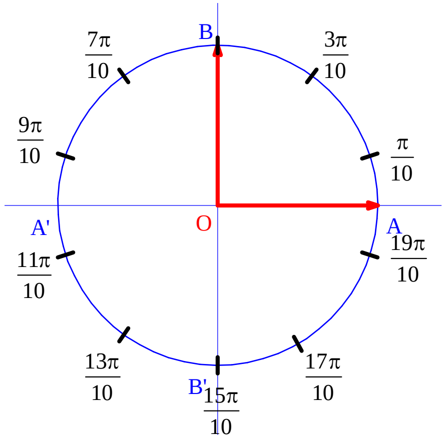
On obtient 0°, 54°, 90°, 126°, 162°, 198°, 234°, 270°, 300°, 342°.

Ce n'est cependant pas la méthode la plus adroite. Mieux vaut observer que chaque valeur s'obtient en ajoutant $\frac{\pi}{5}$ à la valeur précédente. Ainsi, on place M_0 sur le cercle trigonométrique.
Les points M_1, M_2, …, M_9, s'obtient par des rotations successives de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Ainsi, la figure formée par ces points est un décagone régulier convexe (polygone régulier convexe à 10 côtés).



$\frac{5\pi}{10}$



Pour déterminer les solutions dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, on cherche les entiers relatifs k tels que $-\pi \leqslant \frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5} \leqslant \pi \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow -\frac{11\pi}{10} \leqslant \frac{k\pi}{5} \leqslant \frac{9\pi}{10}$

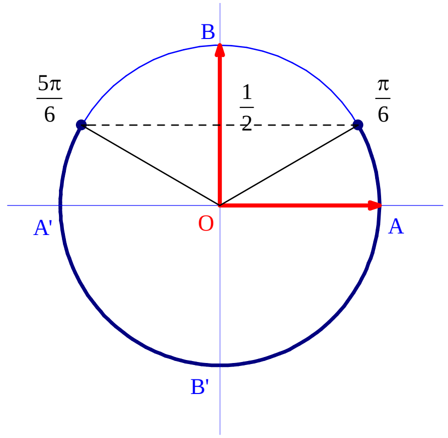
$\Leftrightarrow -\frac{11}{2} \leqslant k \leqslant \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow -5{,}5 \leqslant k \leqslant 4{,}5$

IV.

1°) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ l'inéquation $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ (1).

Faire apparaître sur le cercle trigonométrique ci-dessous l'arc représentant les images des solutions (repasser l'arc en couleur) et donner directement l'ensemble S_1 des solutions sans explication.



$$S_1=\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}\,;2\pi\right]$$

2°) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\pi]$ l'inéquation $\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$ (1).

On donnera directement sans explication l'ensemble S_2 des solutions.

Indication : Utiliser la question 1°).

$$S_2=\left[0\,;\frac{\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12}\,;\pi\right]$$

On pose $X=2x$.

Comme $x\in[0\,;\pi]$, $X\in[0\,;2\pi]$.

V.

Pour n entier naturel quelconque, on définit les phrases A : « n est premier » et B : « 2^n-1 est premier ».

On admet que l'implication B $\Rightarrow$ A est vraie pour tout entier naturel n mais que l'implication A $\Rightarrow$ B est fausse.

1°) Compléter la phrase suivante :

A est une condition nécessaire pour B.

2°) Compléter la phrase suivante en utilisant la locution « il faut que » ou « il suffit que ».

Pour que 2^n-1 soit premier, il faut que n soit premier.