Applications injectives, surjectives et bijectives

I. Généralités

1°) Définition 1 (fonction)

Une **fonction** notée f d'un ensemble E vers un ensemble F permet d'associer à tout élément de E 0 ou 1 élément de F.

Lorsque l'on peut associer à un élément x de E un élément y de F par la fonction f, cet élément (unique) est appelé l'**image** de x par f. On le note $f(x)$.

2°) Exemple

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

0 n'a pas d'image par f et tous les réels non nuls ont une image.

Vocabulaire

Soit f une fonction de E dans F.
E est appelé **l'ensemble de départ** ; F est appelé **l'ensemble d'arrivée**.

3°) Définition 2 (application)

Une **application** f de E dans F est une fonction de E dans F tel que tout élément de E a une unique image dans F (forcément unique).

Exemple :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

4°) Ensemble de définition

Définition

Soit f une fonction de E dans F.
On appelle **ensemble de définition** de f, l'ensemble noté D des éléments de E qui ont une image par f.

Propriété

La restriction d'une fonction f à D définit une application de D dans F.

5°) Vocabulaire

Soit f une fonction de E dans F.
E est appelé **l'ensemble de départ** ; F est appelé **l'ensemble d'arrivée**.

6°) Composition

Définition

Soit f une fonction de E dans F et g une fonction de F dans G.
On appelle **composée** de f suivie de g la fonction notée $g \circ f$ de E dans G définie par $(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right]$.

Propriété fondamentale (« associativité » de la composition des applications) :

Étant données 3 applications f, g, h ($f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$), on a : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

La démonstration est quasiment évidente.

Du coup, il est licite d'écrire cette égalité sans parenthèses.

7°) Application identité

Définition

On appelle **application identité** d'un ensemble E l'application de E dans E notée id_E définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$.

Propriété :

Soit f une application de E dans F.

On a : $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.

II. Applications injectives

1°) Définition

Soit f une application de E dans F.

On dit que f est une **injection** pour exprimer que :
pour tout couple (x, x') d'éléments de E, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

On dit aussi que f est **injective**.

Remarques :

- f est une injection signifie que 2 éléments distincts de E ont 2 images différentes.

- L'implication pourrait être une équivalence mais seule l'implication est vraiment intéressante.

- **Application non injective**

$f : E \to F$

f n'est pas injective s'il existe $(x, x') \in E^2$ tel que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

2°) Exemple et contre-exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une injection.
$x \mapsto x^3$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas une injection.
$x \mapsto x^2$

3°) Propriété

Si f et g sont deux injections, alors $g \circ f$ est une injection.

$f : E \to F$ et $g : F \to G$
$g \circ f : E \to G$

La composée de deux injections est une injection.

Démonstration :

Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.
Démontrons que l'on a : $x = x'$.

On a $g\left[f(x)\right] = g\left[f(x')\right]$.
g est injective d'où $f(x) = f(x')$.
Or f est injective.
Donc $x = x'$.

Donc $g \circ f$ est une injection.

4°) Propriété

Soit f et g deux applications.

Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Démonstration :

Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$.
D'où $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Or $g \circ f$ est injective.

Donc $x = x'$.

III. Surjection

1°) Définition

$f : E \to F$
On dit que *f* est une **surjection** pour exprimer que quelque soit *y* dans *F*, il existe *x* dans *E* tel que $f(x) = y$.

On dit aussi que *f* est **surjective.**

Remarque :

« L'ensemble d'arrivée est de toute première importance ».

2°) Exemple et contre-exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas une surjection.
$x \mapsto x^2$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une surjection.
$x \mapsto x^2$

3°) Propriété :

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f : E \to G$ est surjective.

Démonstration :

Soit $z \in G$.

Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.

g est surjective donc il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.
f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Par suite, $(g \circ f)(x) = z$.

On en déduit que $g \circ f$ est surjective

4°) Propriété

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
Si $g \circ f : E \to G$ est surjective, alors *g* est surjective.

Démonstration :

Soit $z \in G$.
Démontrons qu'il existe *y* dans *F* tel que $g(y) = z$.

On sait que $g \circ f$ est surjective. Donc il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.
On pose $y = f(x)$.
On a alors $g(y) = z$.

Donc quelque soit $z \in G$, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.
Donc *g* est surjective.

IV. Applications bijectives

1°) Définition

Soit *f* une application de *E* dans *F*.

On dit que *f* est une **bijection** pour exprimer que *f* est à la fois une injection et une surjection, ce qui se traduit par : quel que soit *y* dans *F* il existe un unique $x \in F$ tel que $f(x) = y$.

2°) Exemple

$f : x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

La bijection réciproque est l'application $g : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ (voir plus loin).

3°) Propriété

Si *f* et *g* sont deux bijections de *E* dans *F* et de *F* dans *G* alors $g \circ f$ est une bijection.

4°) Démonstration

La composée de deux injections est une injection.

La composée de deux surjections est une surjection.

5°) Définition de la bijection réciproque

Soit f une bijection de E dans F.

On appelle **bijection réciproque** de f l'application notée $g = f^{-1}$ de F dans E qui à tout élément y de F associe l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$.

6°) Propriété

Même hypothèse que 5°).

$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$

$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$

7°) Propriété

$f : E \to F$ est une bijection de E dans F si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

8°) Propriété

Si f et g sont deux bijections de E dans F et de F dans G alors la bijection réciproque de $g \circ f$ est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

9°) Graphique d'une fonction et de sa réciproque