Sommations doubles

I. Exemple 1

Soit n un entier naturel.

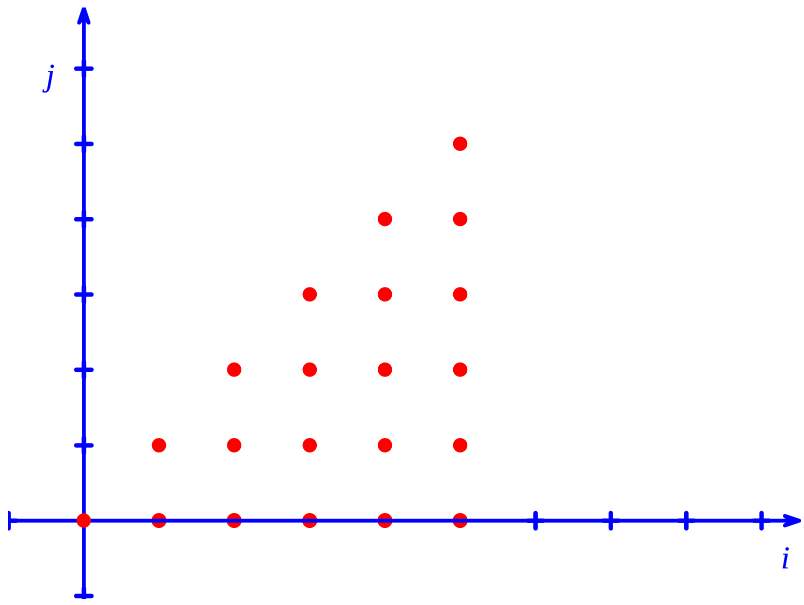
Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} ij$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} ij \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(i \sum_{j=0}^{i} j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(i \times \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \left(i^3 + i^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=0}^{n} i^3 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 (n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \quad \text{(formules de sommes des carrés et des cubes d'entiers naturels)}
\end{aligned}$$

On pose $u_{i,\, j} = i \times j$.

On réécrit la somme $S_n = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant i}} u_{i,\, j}$.

Nous allons représenter dans le plan muni d'un repère les couples $(i,\, j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant i$.



II. Exemple 2

Soit n un entier naturel.

Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} ij$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} \left(i \sum_{j=0}^{n} j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{in(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \left(\sum_{i=0}^{n} i \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2
\end{aligned}
$$

III. Méthodes de calcul

• Un cas très simple

Soit n et p deux entiers naturels.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{p} b_j\right)$$

• Interversion de deux Σ

On représente l'ensemble des points correspondant aux indices dans un repère puis on intervertit (voir exemple).

Application : expression simplifiée d'une expression déterminée par une somme double

IV. Application : carré d'une somme

Soit x_1, x_2, …, x_n n réels.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\times\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_i x_j\\
&= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j
\end{aligned}$$

V. Utilisation de la calculatrice

Exercices

$\boxed{1}$ Soit n un entier naturel.

Calculer $S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{i+j}$.

$\boxed{2}$ Soit n un entier naturel.

Calculer $S_n = \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} 2^{p}$.

$\boxed{3}$ Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{p} \left(i^3 \ln k\right)$.

$\boxed{4}$ Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{k}{i}\right)$.

$\boxed{5}$ Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.

$\boxed{6}$ Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |i - j|$.

$\boxed{7}$ Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \left(i \times 2^{j}\right)$.

Solutions :

$\boxed{\mathbf{1}}$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} 2^{i+j}$$

$$S_n = \left(\sum_{i=0}^{n} 2^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} 2^j \right)$$

$$= \left(2^{n+1} - 1\right) \times \left(2^{n+1} - 1\right)$$

$$= \left(2^{n+1} - 1\right)^2$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

$$S_n = \sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} 2^p$$

$$= \sum_{q=0}^{n} \left(2^{q+1} - 1\right)$$

$$= \left(\sum_{q=0}^{n} 2^{q+1} \right) - \left(\sum_{q=0}^{n} 1 \right)$$

$$= \left(\sum_{q=0}^{n} 2^{q+1} \right) - (n+1)$$

$$= \sum_{q=1}^{n+1} 2^q - (n+1) \qquad \text{(translation d'indice dans la somme)}$$

$$= 2 \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} - n - 1$$

$$= 2^{n+2} - 2 - n - 1$$

$$= 2^{n+2} - n - 3$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

$(n,\ p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{p} \left(i^3 \ln k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{p} i^3 \ln k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\ln k \left(\sum_{i=0}^{p} i^3 \right) \right]$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{p} i^3 \right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k \right)$$

$$= \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)^2 \times \ln n!$$

Variantes pour les trois dernières lignes :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln k \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)^2 \times \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k \right)$$

$$= \left(\frac{p(p+1)}{2} \right)^2 \times \ln n!$$

$\boxed{\textbf{4}}$

$n \in \mathbb{N}^*$

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{k}{i}\right)$$

La variable muette de la 1ère somme est *k*, elle varie de 1 à *n*.
La variable muette de la 2e somme est *i* ; elle varie de *k* à *n*.

Essai : respecter l'ordre des sommations

On « tombe » sur $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \left(\frac{k}{i}\right) = k \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$.

Il n'existe pas de formule sommatoire pour $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}$.

Il est impossible de calculer la somme par ce moyen.
On va intervertir les sommations.

Bonne explication :

On représente les points dans le plan muni d'un repère.
Avec l'ordre original, on effectue une sommation par colonnes.
En changeant, l'ordre on effectue une sommation par ligne.

Pour $i = 1$, *k* prend la valeur 1.
Pour $i = 2$, *k* prend les valeurs 1 et 2.
Pour $i = 3$, *k* prend les valeurs 1, 2, 3.

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{k}{i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n}{2}$$

$$=\frac{n^2+3n}{4}$$

Dans la version initiale, $S=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{p}\left(\frac{k}{i}\right)$ où n et p sont deux entiers naturels on nuls tels que l'on ait : $p\leqslant n$.

$i \backslash k$	1	2	3	4	…	n
1	•					
2	•	•				
3	•	•	•			
4	•	•	•	•		
n	•	•	•	•		•

$\boxed{5}$

$n \in \mathbb{N}^*$

$$S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(j \sum_{i=1}^{j} i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(j \, \frac{j(j+1)}{2} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j^3 + j^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(j^3 + j^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \frac{\left(n(n+1)\right)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $S=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}|\,i-j\,|$.

$i \backslash j$	1	2	3	…	n
1	0	1	2		$n-1$
2		0	1		
3			0	1	2
					1
n					0

$S=1\times(n-1)+2\times(n-2)+\ldots+1\times(n-1)$

$S=\sum\limits_{k=1}^{n-1}k\times(n-k)$

$=n\sum\limits_{k=1}^{n-1}k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2$

$=n\dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$=n(n-1)\left(\dfrac{n}{2}-\dfrac{2n-1}{6}\right)$

$=\dfrac{n(n-1)(n+1)}{6}$

($S_n=\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n}|\,i-j\,|$)

Solution d'Eliott Gesteau : à peu près pareil sauf qu'il avait rempli tout le tableau.
Il obtenait deux fois la somme.

$\boxed{\mathbf{7}}$ On doit admettre que $\sum_{k=0}^{n} k \times 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$.

On arrive à :

$$S = \sum_{i=0}^{n} i \times 2^i \times \left(2^{n-i+1} - 1\right)$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} i \times \left(2^{n+1} - 2^i\right)$$

Fin corrigé des ex.

Le 20-9-2014

J'ai travaillé la veille les sommes doubles avec Louise Lebret.
Son professeur avait intitulé un paragraphe « somme triangulaire ».

Je pense qu'il faut parler en effet de somme rectangulaire, de somme triangulaire.

Une somme double consiste en une « somme de sommes ».

Somme rectangulaire : on peut faire une « sommation par lignes » ou une « sommation par colonnes ».

Somme triangulaire : idem mais on doit faire attention aux bornes des indices.

Voir cours de Laurent Garcin
Voir aussi cours en ligne du lycée Dupuy de Lôme

Le 18-7-2018

Je déplac e :

IV. Utilisation de la calculatrice

Le 19-5-2016

J'ai noté sur une feuille : « Double somme à faire sur la calculatrice »