Un lieu géométrique

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R.
Soit A un point fixé de $\mathcal{C}$.

Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$, on note T la tangente en M à $\mathcal{C}$.
On note H le projeté orthogonal de A sur T.

Question : Déterminer le lieu de H lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

Les élèves travaillent sur Geogebra.

Les élèves reprennent le travail en prenant A à l'extérieur du cercle puis A à l'intérieur du cercle.
Ils obtiennent alors de nouvelles formes de courbes.
Dans le cas où A est à l'extérieur du cercle, on observe une boucle.

Ils utilisent la fonction Trace.

Le lieu de H lorsque M décrit $\mathcal{C}$ est une courbe en forme de cœur ou de pomme.

Cette courbe n'est pas étudiée au niveau du lycée.

En raison de sa ressemblance à un cœur, elle a été appelée **« cardioïde »** par les mathématiciens.

Cette cardioïde est appelée la **podaire** du cercle $\mathcal{C}$ par rapport au point A.

Pour aller plus loin.

1. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a) Ce n'est pas la représentation graphique d'une fonction.

b) Il est néanmoins possible de la définir en *mode paramétrique* grâce aux deux équations

$$\begin{cases} x = R\cos t \times (1+\cos t) \\ y = R\sin t \times (1+\cos t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Pour la tracer sur l'écran de la calculatrice, on doit la mettre en mode paramétrique.

$$\mathrm{XT} = 1 * \cos(\mathrm{T}) * [1+\cos(\mathrm{T})]$$
$$\mathrm{YT} = 1 * \sin(\mathrm{T}) * [1+\cos(\mathrm{T})]$$

c) Cette courbe peut aussi être définie par une équation cartésienne.

d) Il est également possible de définir une cardioïde par une équation dans un repère :
$\left(x^2+y^2-ax\right)^2 = a^2 \times \left(x^2+y^2\right)$ (admis).

Il s'agit d'une équation implicite dans laquelle il n'est pas possible d'exprimer x en fonction de y ou y en fonction de x.

2. Les mathématiciens ont découvert des propriétés à cette courbe. Ils ont démontré les résultats suivants.

- La longueur (le périmètre) d'une cardioïde formée à partir d'un cercle de diamètre a vaut $8a$.
- L'aire du domaine à l'intérieur d'une cardioïde formée à partir d'un cercle de diamètre a vaut $\dfrac{3\pi a^2}{2}$.

3. Un autre moyen de faire une cardioïde : faire rouler sans glisser un cercle sur un autre de même rayon (génération cinématique ou mécanique).

4. Il est possible de faire apparaître une cardioïde au fond d'une casserole en l'éclairant par une source ponctuelle à proximité du bord.

Le mieux est de faire l'expérience avec les élèves.
Il s'agit d'une *caustique*.

Sources documentaires possibles :

- Tangente 148 sur la cardioïde

- Moteur cardioïde : vidéos sur You Tube