1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 29-5-2015 (45 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ **20**

I. (3 points)

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. On donnera une expression simplifiée.

II. (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ (E).

Il n'est pas demandé d'écrire l'ensemble des solutions.

III. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) a) 2 points ; b) 1 point ; 3°) 1 point)

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement au hasard avec remise deux boules dans l'urne et à noter dans l'ordre la couleur de chacune d'elles.

1°) Calculer la probabilité p d'obtenir deux boules de couleurs différentes (valeur exacte).

$p =$ ....

2°) On répète l'expérience aléatoire 200 fois dans des conditions identiques indépendantes.

a) Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation I au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des expériences où l'on obtient deux boules de couleurs différentes.

I = ...

b) Calculer l'amplitude de I. Donner le résultat sans écrire d'égalité.

……………………………………

3°) On répète l'expérience aléatoire n fois (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) dans des conditions identiques indépendantes.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 %, déterminé à l'aide de la loi binomiale, de la fréquence des expériences où l'on a obtenu deux boules de couleurs différentes ait une amplitude inférieure ou égale à 0,1.

……………… (un seul résultat, sans égalité, sans expliquer)

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.
L'investisseur se rend dans une agence immobilière pour acheter un appartement et le louer. Le responsable de cette agence lui affirme que 60 % des appartements sont rentables. Pour vérifier son affirmation, on a prélevé au hasard 280 dossiers d'appartements loués.

1°) On suppose que l'affirmation du vendeur est vraie.
Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation I au seuil approximatif de 95 %, obtenu à l'aide de la loi binomiale, de la fréquence d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de taille 280.

I = ...

2°) Parmi les dossiers prélevés, 120 correspondent à des appartements rentables.
Déterminer la fréquence observée d'appartements rentables dans l'échantillon prélevé.

$f =$ .... (un seul résultat)

3°) Doit-on rejeter l'affirmation du responsable de cette agence ? Justifier la réponse à l'aide des résultats précédents. On répondra à l'aide d'une phrase.

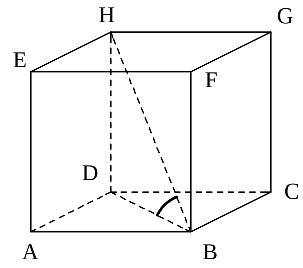
……

……

……

V. (2 points)

Soit ABCDEFGH un cube (ne rien écrire sur la figure ci-contre).
Calculer $\cos\widehat{\mathrm{DBH}}$ (valeur exacte).



$\cos\widehat{\mathrm{DBH}} =$ ....

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit (Ox) et (Oy) deux droites perpendiculaires en O.
Soit A un point de (Oy) distinct de O. On pose $\mathrm{OA} = a$.
Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on note M_k le point de la demi-droite [Ox) tel que $\mathrm{OM}_k = k$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note L_n la somme des longueurs des segments $[\mathrm{AM}_1]$, $[\mathrm{AM}_2]$, …, $[\mathrm{AM}_n]$.

1°) Compléter l'égalité suivante en remplaçant les pointillés par une expression en fonction de k et a.

$$\mathrm{L}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \text{.......................................}$$

2°) On prend $a = 2$. À l'aide de commande de calculatrice permettant de calculer une somme, déterminer la valeur arrondie au millième de L_{50}.

……………………………… (un seul résultat)

Corrigé du contrôle du 29-5-2015

I.

Pour tout réel x, on pose $f(x)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

Exprimer $f(x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. On donnera une expression simplifiée.

Développement d'une expression trigonométrique

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)&=3\left(\cos x\times\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\times\sin x\right)-\left(\sin\frac{\pi}{4}\times\cos x-\sin x\times\cos\frac{\pi}{4}\right)\\&=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin x\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin x\right)\\&=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\\&=\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x\end{aligned}$$

Il faut penser à quantifier.

Il y a eu beaucoup d'erreurs dues des problèmes de parenthèses.

II.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ (E).

Il n'est pas demandé d'écrire l'ensemble des solutions.

On doit résoudre l'équation par chaîne d'équivalences en utilisant le symbole $\Leftrightarrow$.

Résolution d'une équation trigonométrique

(E) $\Leftrightarrow\ \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\\\text{ou}\\3x-\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k'\pi\quad(k'\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}3x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\\\text{ou}\\3x=\frac{3\pi}{2}+2k'\pi\quad(k'\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\quad(k\in\mathbb{Z})\\\text{ou}\\x=\frac{\pi}{2}+\frac{2k'\pi}{3}\quad(k'\in\mathbb{Z})\end{array}\right.$$

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$$S=\left\{\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{2k'\pi}{3},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

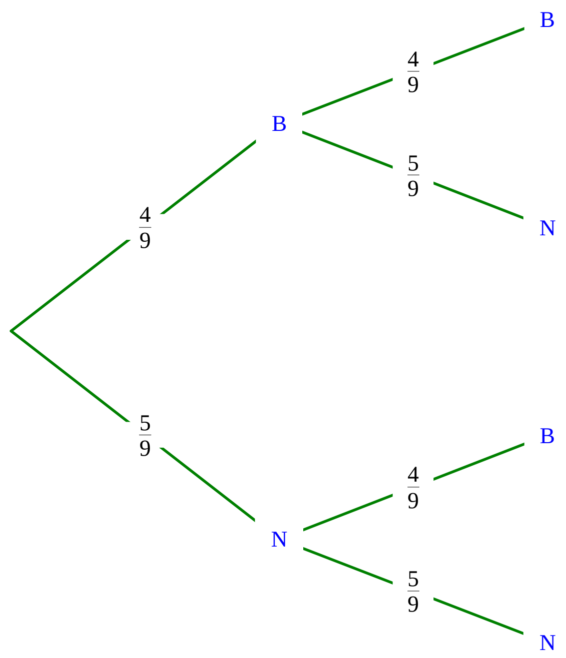
III.

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement au hasard avec remise deux boules dans l'urne et à noter dans l'ordre la couleur de chacune d'elles.

1°) Calculer la probabilité p d'obtenir deux boules de couleurs différentes (valeur exacte).

$$p=\frac{40}{81}$$

Le résultat s'obtient grâce à un arbre de probabilités avec les événements B : « obtenir une boule blanche » et N : « obtenir une boule noire ».



On considère les chemins B-N et N-B.

$$p=\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{40}{81}$$

2°) On répète l'expérience aléatoire 200 fois dans des conditions identiques indépendantes.

a) Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation I au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des expériences où l'on obtient deux boules de couleurs différentes.

$$\mathrm{I}=\left[\frac{85}{200}\,;\frac{113}{200}\right]$$

I est l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de l'événement « obtenir deux boules de couleurs différentes ».

On constate que $p\in\mathrm{I}$.

En effet, $\frac{113}{200}=0,565$, $\frac{83}{200}=0,415$, $\frac{40}{81}=0,493827160...$

b) Calculer l'amplitude de I. Donner le résultat sans écrire d'égalité.

0,14

Ce résultat s'obtient en effectuant la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure de l'intervalle : $\frac{113}{200}-\frac{85}{200}=\frac{28}{200}$.

3°) On répète l'expérience aléatoire n fois (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) dans des conditions identiques indépendantes.
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 %, déterminé à l'aide de la loi binomiale, de la fréquence des expériences où l'on a obtenu deux boules de couleurs différentes ait une amplitude inférieure ou égale à 0,1.

390 (un seul résultat, sans égalité, sans expliquer)

On tâtonne en essayant des valeurs de n. On peut aussi utiliser un programme sur la calculatrice.
Pour la loi binomiale de paramètres $n=390$ et $p=\frac{40}{81}$, on obtient en effet : $\frac{212}{390}-\frac{173}{390}=\frac{39}{390}=0,1$.

Une autre méthode consiste à utiliser la formule de l'intervalle de fluctuation donné en 2^e^ : $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

L'amplitude est égale à $\left(p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(p-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche n tel que $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0,1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{n}\geqslant 20$

$\Leftrightarrow n\geqslant 400$

On cherche donc une valeur de n aux alentours de 400. On procède par essais successifs.
On trouve $n=390$.

IV.

Un investisseur souhaite acheter un appartement dans l'objectif de le louer. Pour cela, il s'intéresse à la rentabilité locative de cet appartement.
L'investisseur se rend dans une agence immobilière pour acheter un appartement et le louer. Le responsable de cette agence lui affirme que 60 % des appartements sont rentables. Pour vérifier son affirmation, on a prélevé au hasard 280 dossiers d'appartements loués.

1°) On suppose que l'affirmation du vendeur est vraie.
Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, l'intervalle de fluctuation I au seuil approximatif de 95 %, obtenu à l'aide de la loi binomiale, de la fréquence d'appartements rentables dans un échantillon aléatoire de taille 280.

$$\mathrm{I}=\left[\frac{152}{280}\,;\frac{184}{280}\right]$$

On utilise la loi binomiale de paramètres $n=280$ et $p=0,6$.
On constate que $p\in\mathrm{I}$.

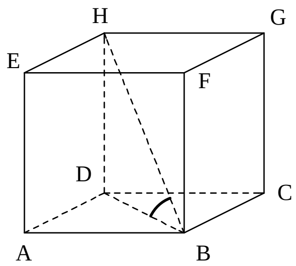
2°) Parmi les dossiers prélevés, 120 correspondent à des appartements rentables.
Déterminer la fréquence observée d'appartements rentables dans l'échantillon prélevé.

$$f = \frac{120}{280} \text{ (un seul résultat)}$$

3°) Doit-on rejeter l'affirmation du responsable de cette agence ? Justifier la réponse à l'aide des résultats précédents. On répondra à l'aide d'une phrase.

On constate que $f \notin \mathrm{I}$ donc on peut rejeter l'affirmation du responsable de l'agence avec un risque d'erreur approximativement de 5 % (inférieur à 5 %).

V.



Soit ABCDEFGH un cube (ne rien écrire sur la figure ci-contre).

Calculer $\cos \widehat{\mathrm{DBH}}$ (valeur exacte).

$$\cos \widehat{\mathrm{DBH}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Le triangle BDH est rectangle en D.

On a : $\mathrm{BD} = a\sqrt{2}$ et $\mathrm{BH} = a\sqrt{3}$ (résultats à savoir par cœur : diagonale d'un carré, grande diagonale d'un cube ; ces deux résultats se retrouvent aisément grâce au théorème de Pythagore).

Donc $\cos \widehat{\mathrm{DBH}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BH}} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

On peut aussi donner le résultat sous la forme $\frac{\sqrt{6}}{3}$ mais ce n'est pas nécessaire.

Le triangle DBH n'est pas isocèle donc l'angle $\widehat{\mathrm{DBH}}$ ne mesure pas 45°.

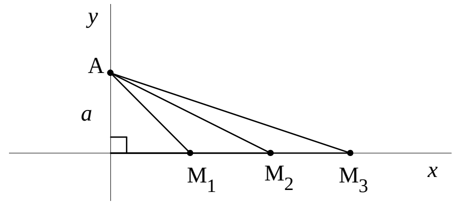
Par conséquent, $\cos \widehat{\mathrm{DBH}}$ n'est pas égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ comme je l'ai trouvé dans de très nombreuses copies.

VI.

Soit (Ox) et (Oy) deux droites perpendiculaires en O.
Soit A un point de (Oy) distinct de O. On pose $\mathrm{OA} = a$.
Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, on note M_k le point de la demi-droite [Ox) tel que $\mathrm{OM}_k = k$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note L_n la somme des longueurs des segments $[\mathrm{AM}_1]$, $[\mathrm{AM}_2]$, …, $[\mathrm{AM}_n]$.

1°) Compléter l'égalité suivante en remplaçant les pointillés par une expression en fonction de k et a.

$$\mathrm{L}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \sqrt{a^2 + k^2}$$



On a $\mathrm{L}_n = \mathrm{AM}_1 + \mathrm{AM}_2 + ... + \mathrm{AM}_n$.

On peut donc écrire : $\mathrm{L}_n = \sum_{k=1}^{k=n} \mathrm{AM}_k$.

Or $\mathrm{AM}_k = \sqrt{a^2 + k^2}$ (obtenu grâce au théorème de Pythagore) d'où le résultat.

2°) On prend $a = 2$. À l'aide de commande de calculatrice permettant de calculer une somme, déterminer la valeur arrondie au millième de L_{50}.

1282,928 (un seul résultat)

On obtient l'affichage : 1282,927704.

Il s'agit « évidemment » d'une valeur approchée.
Les décimales continuent de manière quasi évidente (suite infinie de décimales).