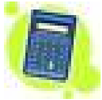
1ère S1

Contrôle du vendredi 22-5-2015 (45 minutes)



Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (2 points)

Simplifier les expressions suivantes où x un réel quelconque (une seule égalité à chaque fois) :

$\cos 8x \cos 5x - \sin 5x \sin 8x = ...$; $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = ...$.

II. (3 points)

Démontrer que : $\sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{\cos 2y - \cos 2x}{2}$ (x et y étant deux réels quelconques).

On veillera particulièrement à la présentation des calculs.

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

Démontrer que, pour tout réel $a \in [0\,;\pi]$, on a : $f(\cos a) = \dfrac{\sin 2a}{2}$.

………

………

………

………

………

………

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (1) ; $\sin 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2).

On demande de compléter les étapes de résolution ci-dessous.
Il n'est pas demandé d'écrire les ensembles de solutions.

(1) $\Leftrightarrow$ $\cos 2x = \cos ....$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x = ... & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ 2x = ... & (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = ... & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x = ... & (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

(2) $\Leftrightarrow$ $\sin 3x = \sin ....$

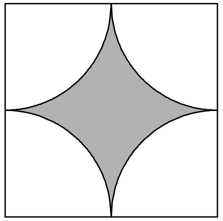
$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x = ... & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ 3x = ... & (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x = ... & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ 3x = ... & (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = ... & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} & \\ x = ... & (k' \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$

V. (8 points : 1°) a) 2 points ; b) 2 points ; 2°) a) 1 point ; b) 1 point + 1 point + 1 point)

Une cible a la forme d'un carré de côté 2. La zone centrale, en gris sur le schéma, est délimitée par des quarts de cercles ayant pour centres les sommets du carré et pour rayon 1. Un tireur gagne s'il atteint la zone centrale.



Ne rien écrire, ne rien marquer sur cette figure.

1°) a) Déterminer la probabilité p qu'un tireur atteigne la zone centrale (valeur exacte). Répondre sans justifier.

$p = ...$

b) Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des tirs gagnants pour des échantillons de 30 tirs. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

…………………………………… (répondre sans faire de phrase, sans égalité)

2°) On munit le plan d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$ où O est le centre du carré de sorte que les sommets du carré sont les points $\mathrm{A}(1;1)$, $\mathrm{B}(-1;1)$, $\mathrm{C}(-1;-1)$, $\mathrm{D}(1;-1)$.

a) On admet que la zone centrale (frontières comprises) est caractérisée par l'un des deux systèmes d'inéquations suivants :

□ $\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1 \\ (|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 \leqslant 1 \end{cases}$ □ $\begin{cases} |x| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 1 \\ (|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 \geqslant 1 \end{cases}$

Cocher le système d'inéquations choisi.

b) On désire simuler n tirs indépendants (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) à l'aide d'un algorithme.
Le nombre n est saisi en entrée.
On choisit n points de coordonnées $(x ; y)$ au hasard à l'intérieur du carré ABCD.
La fréquence de tirs gagnants est affichée en sortie.

Compléter l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i entier naturel allant de 1 à n **Faire**
 x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [– 1 ; 1]
 y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [– 1 ; 1]
 s prend la valeur $(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2$

 Si s …………
  Alors a prend la valeur …………
 FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher ……

Il n'est pas demandé de réaliser le programme correspondant sur calculatrice.

Corrigé du contrôle du 22-5-2015

I.

Simplifier les expressions suivantes où x un réel quelconque (une seule égalité à chaque fois) :

$\cos 8x \cos 5x - \sin 5x \sin 8x = \cos 13x$; $\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x = \sin x$.

On utilise les formules d'addition.

II.

Démontrer que : $\sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{\cos 2y - \cos 2x}{2}$ (x et y étant deux réels quelconques).

On veillera particulièrement à la présentation des calculs.

$$\begin{aligned}\sin^2 x - \sin^2 y &= \frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1-\cos 2y}{2} \qquad \text{(on utilise une formule de linéarisation)}\\ &= \frac{1-\cos 2x - 1 + \cos 2y}{2}\\ &= \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2}\end{aligned}$$

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ définie sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

Démontrer que, pour tout réel $a \in [0\,;\pi]$, on a : $f(\cos a) = \dfrac{\sin 2a}{2}$.

$$\begin{aligned}\forall a \in [0\,;\pi] \quad f(\cos a) &= \cos a\sqrt{1-\cos^2 a}\\ &= \cos a\sqrt{\sin^2 a}\\ &= \cos a\,|\sin a\,|\\ &= \cos a \times \sin a \qquad (\text{car } \forall a \in [0\,;\pi] \quad \sin a \geqslant 0)\\ &= \frac{2\cos a \times \sin a}{2}\\ &= \frac{\sin 2a}{2}\end{aligned}$$

IV.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\cos 2x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (1) ; $\sin 3x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2).

On demande de compléter les étapes de résolution ci-dessous.
Il n'est pas demandé d'écrire les ensembles de solutions.

$$(1) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \text{ou}\\ 2x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \text{ou}\\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

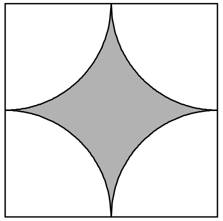
$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \text{ou}\\ 3x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \text{ou}\\ 3x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})\\ \text{ou}\\ x = \dfrac{4\pi}{9} + \dfrac{2k'\pi}{3} \quad (k' \in \mathbb{Z})\end{array}\right.$$

V.

Une cible a la forme d'un carré de côté 2. La zone centrale, en gris sur le schéma, est délimitée par des quarts de cercles ayant pour centres les sommets du carré et pour rayon 1. Un tireur gagne s'il atteint la zone centrale.



Ne rien écrire, ne rien marquer sur cette figure.

1°) a) Déterminer la probabilité p qu'un tireur atteigne la zone centrale (valeur exacte). Répondre sans justifier.

$$p=\frac{4-\pi}{4}$$

L'aire du carré vaut 4.

L'aire de la zone grisée vaut $4-\pi$ car l'aire des quatre quarts de disque est égale à l'aire d'un disque de rayon 1 (l'aire d'un disque de rayon R est égale à πR^2).

La probabilité p s'obtient en calculant le quotient de l'aire de la zone centrale sur l'aire du carrée.

Un certain nombre d'élèves a écrit $p=\frac{1}{5}$. J'imagine que ceux-ci ont cru que toutes les zones de la cible ont la même aire. Heureusement, si on prenait $\frac{1}{5}$, on obtenait le même intervalle de fluctuation.

b) Déterminer à l'aide de la loi binomiale un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des tirs gagnants pour des échantillons de 30 tirs. Donner les bornes sous forme fractionnaire.

$\left[\frac{2}{30}\,;\frac{11}{30}\right]$ (répondre sans faire de phrase, sans égalité)

J'aurais pu demander de calculer l'amplitude de cet intervalle : $\frac{11}{30}-\frac{2}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$.

Avec la calculatrice, on obtient :
$p=0,214601836...$

$\frac{2}{30}=0,06666\underline{6}...$ $\qquad$ $\frac{11}{30}=0,36666\underline{6}...$

On vérifie que p appartient bien à l'intervalle de fluctuation déterminé à l'aide de la loi binomiale.

2°) On munit le plan d'un repère orthonormé (O, I, J) où O est le centre du carré de sorte que les sommets du carré sont les points $\text{A}(1\,;1)$, $\text{B}(-1\,;1)$, $\text{C}(-1\,;-1)$, $\text{D}(1\,;-1)$.

a) On admet que la zone centrale (frontières comprises) est caractérisée par l'un des deux systèmes d'inéquations suivants :

☐ $\begin{cases} |\,x\,|\leqslant 1 \\ |\,y\,|\leqslant 1 \\ (|\,x\,|-1)^2+(|\,y\,|-1)^2\leqslant 1 \end{cases}$ $\qquad$ ☒ $\begin{cases} |\,x\,|\leqslant 1 \\ |\,y\,|\leqslant 1 \\ (|\,x\,|-1)^2+(|\,y\,|-1)^2\geqslant 1 \end{cases}$

Cocher le système d'inéquations choisi.

On utilise la « méthode du point test ». On choisit un point qui appartient à la zone centrale non situé sur la frontière. On sait que l'origine du repère O est le centre de la cible. Ses coordonnées vérifient donc le système.

On a :

$|\,x_{\text{O}}\,|=|\,0\,|=0$
$|\,y_{\text{O}}\,|=|\,0\,|=0$
$(|\,x_{\text{O}}\,|-1)^2+(|\,y_{\text{O}}\,|-1)^2=(0-1)^2+(0-1)^2=2$

Donc on a :

$$\begin{cases} |\,x_{\text{O}}\,|\leqslant 1 \\ |\,y_{\text{O}}\,|\leqslant 1 \\ (|\,x_{\text{O}}\,|-1)^2+(|\,y_{\text{O}}\,|-1)^2\geqslant 1 \end{cases}$$

On en déduit que le système qui caractérise la zone centrale est le deuxième système.

b) On désire simuler n tirs indépendants (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1) à l'aide d'un algorithme.
Le nombre n est saisi en entrée.
On choisit n points de coordonnées $(x\,;y)$ au hasard à l'intérieur du carré ABCD.
La fréquence de tirs gagnants est affichée en sortie.

Algorithme de simulation

Compléter l'algorithme suivant :

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i entier naturel allant de 1 à n **Faire**
    x prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [– 1 ; 1]
    y prend la valeur d'un réel aléatoire dans l'intervalle [– 1 ; 1]
    s prend la valeur $\left(|x|-1\right)^2+\left(|y|-1\right)^2$
    Si $s \geqslant 1$
        Alors a prend la valeur $a+1$
    FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\frac{a}{n}$

La condition « $s \geqslant 1$ » se réfère au système établi à la question a).

a compte le nombre de fois où l'on atteint la zone gagnante.

$\frac{a}{n}$ est la fréquence de tirs gagnants (c'est ce que l'on voulait afficher en sortie).

Il n'est pas demandé de réaliser le programme correspondant sur calculatrice.

Programme sur calculatrice TI 83 ou 84 :

• **Nombre aléatoire :**

On utilise la « fonction » rand ou NbrAléat (touche $\boxed{\text{math}}$, PRB, 1 : rand ou NbrAléat) qui fournit un nombre aléatoire entre 0 et 1, plus précisément dans l'intervalle $[0\,;1[$.

On notera qu'il n'y a pas à mettre d'intervalle. Le nombre aléatoire est automatiquement dans l'intervalle $[0\,;1[$, sans qu'il soit nécessaire de préciser l'intervalle.

Pour obtenir un nombre aléatoire dans l'intervalle [– 1 ; 1] (en fait, dans l'intervalle [– 1 ; 1[, ce qui ne change rien), on utilise la formule 2∗NbrAléat – 1.

• **Valeur absolue :**

$\boxed{\text{math}}$, NUM, 1 : Abs(

```
: Prompt N
: 0 → A
: For(I,1,N)
: 2∗rand – 1 → X
: 2∗rand – 1 → Y
: (abs(X)–1)² +(abs(Y)–1)²  → S
: If S ≥ 1
: Then
:  A +1→ A
: End
: End
: Disp A/N
```

• La commande rand ou nbreAléat donne un nombre aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1[; on la trouve dans MATH PRB.
Il n'y a pas à préciser l'intervalle. Le nombre aléatoire est automatiquement dans l'intervalle [0 ; 1[.
L'expression 2∗rand – 1 donne un nombre dans l'intervalle [– 1 ; 1[.

• La commande abs donne la valeur absolue d'un nombre ; on la trouve dans MATH MATH.