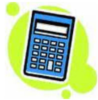
TS1

Contrôle du mardi 26 mai 2015
(50 minutes)



Prénom : …………………………………………. **Nom :** …………………

Note : …. / 20

Dans les deux exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

I. (8 points : 1°) 4 points ; 2°) 4 points)

À tout réel m on fait correspondre les plans P_m et P_m' d'équations cartésiennes respectives
$mx - y - 2(m+1)z + 5 = 0$ et $mx - (m-2)y - z + m + 1 = 0$.

1°) Déterminer le(s) réel(s) m tel(s) que les plans P_m et P_m' soient perpendiculaires.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Dans cette question, on prend $m = 2$.
Vérifier que les plans P_2 et P_2' sont sécants. Déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection *D*.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (12 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points ; 3°) 4 points ; 4°) 2 points)

On donne les points $A(2\,;-3\,;1)$ et $B(-3\,;1\,;2)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}\,(-1\,;2\,;1)$. On désigne par Δ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et par *P* le plan passant par B et orthogonal à Δ.

1°) Donner sans expliquer un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

2°) Déterminer une équation cartésienne du plan *P*.

3°) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur *P*.

4°) En déduire la distance du point A au plan *P* (valeur exacte).

5°) Calculer les coordonnées du point K, projeté orthogonal de O sur *P*. Donner les grandes lignes de la démarche.

Corrigé du contrôle du 26-5-2015

I.

À tout réel m on fait correspondre les plans P_m et P_m' d'équations cartésiennes respectives
$mx-y-2(m+1)z+5=0$ et $mx-(m-2)y-z+m+1=0$.

1°) Déterminer le(s) réel(s) m tel(s) que les plans P_m et P_m' soient perpendiculaires.

Le vecteur $\vec{u}(m\,;-1\,;-2m-2)$ est un vecteur normal à P_m.

Le vecteur $\vec{u'}(m\,;-m+2\,;-1)$ est un vecteur normal à P_m'.

$$\begin{aligned}
P_m \perp P_m' &\Leftrightarrow \vec{u}\bullet\vec{u'}=0\\
&\Leftrightarrow m^2+m-2+2m+2=0\\
&\Leftrightarrow m^2+3m=0\\
&\Leftrightarrow m(m+3)=0\\
&\Leftrightarrow m=0 \text{ ou } m=-3
\end{aligned}$$

2°) Dans cette question, on prend $m=2$.
Vérifier que les plans P_2 et P_2' sont sécants. Déterminer un système d'équations paramétriques de leur droite d'intersection D.

$P_2 : 2x-y-6z+5=0$

$P_2' : 2x-z+3=0$

Le vecteur $\vec{u}(2\,;-1\,;-6)$ est un vecteur normal à P_2.

Le vecteur $\vec{u'}(2\,;0\,;-1)$ est un vecteur normal à P_2'.

Il n'existe pas de réel α tel que $\vec{u'}=\alpha\vec{u}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que les plans P_2 et P_2' ne sont pas parallèles.
Par conséquent, ils sont sécants suivant une droite D.

Pour déterminer un système d'équations paramétriques de D, on considère le système $\begin{cases}2x-y-6z+5=0 & (1)\\ 2x-z+3=0 & (2)\end{cases}$.

On pose $z=t$ $(t\in\mathbb{R})$ et on résout le système $\begin{cases}(1)\\(2)\\ z=t & (3)\end{cases}$.

$$\begin{cases}(1)\\(2)\\(3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y-6z+5=0\\2x-z+3=0\\z=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-y-6t+5=0\\2x-t+3=0\\z=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-6t+5\\2x=t-3\\z=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=t-3-6t+5\\x=\dfrac{t-3}{2}\\z=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2-5t\\x=\dfrac{t-3}{2}\\z=t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}\\y=2-5t\\z=t\end{cases}$$

Un système d'équations paramétriques de D s'écrit $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{2}\\y=2-5t\\z=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

II.

On donne les points $A(2\,;-3\,;1)$ et $B(-3\,;1\,;2)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}\ (-1\,;2\,;1)$. On désigne par Δ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et par *P* le plan passant par B et orthogonal à Δ.

On ne fait pas de graphique dans cet exercice.

1°) Donner sans expliquer un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

$$\Delta \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2°) Déterminer une équation cartésienne du plan *P*.

$\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.
Or $\Delta \perp P$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à *P*.

Soit M un point quelconque de l'espace de coordonnées $(x\,;y\,;z)$.

$$\begin{aligned} M \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{u} = 0 \\ &\Leftrightarrow -(x-2) + 2(y-1) + (z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x + 2y + z - 7 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de *P* est $-x + 2y + z - 7 = 0$.

3°) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur *P*.

H est le point d'intersection de Δ et *P* donc son paramètre *t* vérifie l'égalité $-2 + t + 2(-3 + 2t) + 1 + t - 7 = 0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow -2 + t - 6 + 4t + 1 + t - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow -14 + 6t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

On remplace la valeur de *t* dans le système d'équations paramétriques de Δ.

$$\mathrm{H} \left| \begin{aligned} x_{\mathrm{H}} &= 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3} \\ y_{\mathrm{H}} &= -3 + \frac{14}{3} = \frac{5}{3} \\ z_{\mathrm{H}} &= 1 + \frac{7}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned} \right.$$

4°) En déduire la distance du point A au plan *P* (valeur exacte).

Par définition, la distance du point A au plan *P* est égale à AH.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(A, P) &= AH \\ &= \sqrt{(x_{\mathrm{H}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{H}} - y_{\mathrm{A}})^2 + (z_{\mathrm{H}} - z_{\mathrm{A}})^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{196}{9} + \frac{49}{9}} \\ &= \frac{7\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

On pourrait vérifier avec la formule de distance à un plan.

5°) Calculer les coordonnées du point K, projeté orthogonal de O sur *P*. Donner les grandes lignes de la démarche.

Soit Δ' la droite orthogonale à *P* passant par O.

Δ' passe par O et a pour vecteur directeur $\vec{u}$.

$$\Delta' \begin{cases} x = -t' \\ y = 2t' \\ z = t' \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Le paramètre t' du point K vérifie l'égalité $t' + 4t' + t' - 7 = 0 \quad (2)$.

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 6t' = 7 \\ &\Leftrightarrow t' = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\text{D'où K} \left| \begin{aligned} x_{\mathrm{K}} &= -\frac{7}{6} \\ y_{\mathrm{K}} &= \frac{7}{3} \\ z_{\mathrm{K}} &= \frac{7}{6} \end{aligned} \right. .$$