Formule de Viète

François Viète était un mathématicien français à cheval sur les XVI^{e} et XVII^{e} siècle. Il a travaillé pour Henri IV.

La formule de Viète est une formule intéressante pour sa beauté et pour la culture.
Il s'agit d'une formule simple et élégante.
La formule de Viète est également intéressante du point de vue de la démonstration.

1. Soit x un réel fixé dans l'intervalle $]0\,;\pi[$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $P_n = \cos\dfrac{x}{2} \times \cos\dfrac{x}{4} \times \cos\dfrac{x}{8} \times \ldots \times \cos\dfrac{x}{2^n}$.

On peut écrire $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$.

a. Simplification

Pour tout réel θ qui n'est pas de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a : $\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$.

$$P_n = \frac{\sin x}{\cancel{2\sin\frac{x}{2}}} \times \frac{\cancel{\sin\frac{x}{2}}}{\cancel{2\sin\frac{x}{4}}} \times \frac{\cancel{\sin\frac{x}{4}}}{\cancel{2\sin\frac{x}{8}}} \times \ldots \times \frac{\cancel{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}}{2\sin\frac{x}{2^n}} \qquad \text{(les termes se simplifient deux à deux)}$$

$$= \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

$$= \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{2^n} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

b. Limite quand *n* tend vers + ∞

On pose $X = \dfrac{x}{2^n}$.

$$\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\frac{x}{2^n}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\frac{X}{\sin X}$$

$$\frac{\sin X}{X}\xrightarrow[X\to 0]{}1 \text{ (limite de référence) donc } \frac{X}{\sin X}\xrightarrow[X\to 0]{}1$$

$$\frac{x}{2^n}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1 \text{ donc } P_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\sin x}{x}.$$

On écrit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^{k+1}}=\frac{\sin x}{x}$.

2. On applique le résultat précédent pour $x=\frac{\pi}{2}$.

> La formule de Viète est un cas particulier de la formule précédente écrite à l'aide d'un produit infini.

On obtient $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$.

Afin d'écriture la formule de Viète sous sa forme habituelle, nous allons nous intéresser aux facteurs du produit.

$k=1 \qquad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=2 \qquad \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$k=2 \qquad \cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$k=3 \qquad \cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

…

$k = n \qquad \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}}{2}$ (n racines)

On le démontre par récurrence en utilisant les formules de duplication (la formule utilisée ici est : $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$).

On peut alors enfin écrire la formule de Viète :

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\times\ldots\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}{2}\times\ldots=\frac{\pi}{2}}$$

On l'écrit parfois :

$$\boxed{\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}\times\ldots=\frac{2}{\pi}}$$

La formule de Viète n'a pas d'intérêt pratique.

En pratique, on observe que la convergence est très lente.
La formule de Viète ne permet donc pas, en pratique, de déterminer les décimales de π.
Pour déterminer les décimales de π, on utilise d'autres formules.

Viète a démontré sa formule géométriquement donc de manière différente de ce qui est présenté ici.

Notes :

1. On dit parfois qu'il s'agit d'une simplification par télescopage.

2. La formule de Viète correspond à la formule $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\sin x}{x}$ écrite pour une valeur particulière de x.