Inégalité de Cauchy-Schwarz

Il s'agit d'une propriété constituée d'une seule inégalité générale.

> Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
>
> Soit $(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(y_1\,;y_2\,;\ldots;y_n)\in\mathbb{R}^n$.
>
> On a : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}\times\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}}$.

Démonstration :

1^er^ cas : $(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n)=(0\,;0\,;\ldots;0)$

On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0$ et $\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}\times\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}}=0$.

Donc l'inégalité est vraie (il s'agit même d'une égalité).

2^e^ cas : $(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n)\neq(0\,;0\,;\ldots;0)$

Pour tout réel t, on pose $\Phi(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i t+y_i)^2$.

> Il s'agit d'une astuce pour démarrer (à apprendre).

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \Phi(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{\,2}t^2+2tx_iy_i+y_i^{\,2}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}t^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} 2tx_iy_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right)$$

$$=t^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)+2t\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right)$$

$\Phi(t)$ est de la forme at^2+bt+c avec $a=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}$, $b=2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $c=\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}$.

$a \neq 0$ car les x_i ne sont pas tous nuls.
Φ est donc une fonction polynôme du second degré.
D'autre part, d'après l'expression initiale de Φ, $\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi(t) \geqslant 0$.

En effet, c'est une somme de carrés dans $\mathbb{R}$.

Son discriminant réduit est donc négatif ou nul.

On applique le lemme suivant tout à fait important :

Un polynôme du second degré dont le signe est constant admet un discriminant négatif ou nul.

Ce lemme se démontre aisément à l'aide de la règle du signe d'un polynôme du second degré.

Ce lemme peut être visualisé graphiquement de manière très simple.

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2 - ac \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right) \qquad \left(b' = \frac{b}{2} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\end{aligned}$$

Donc on a : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right) \leqslant 0$.

Par suite, on a : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right)$.

D'où $\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}\right)}$.

Par suite, $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}}$.

Dans les exercices, on ne refait pas la démonstration.
On applique directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Il est possible de préciser le cas d’égalité dans l’inégalité de Cauchy-Schwarz.

Cas particulier lorsque l’on prend les y_i égaux aux x_i.
Dans ce cas, l’inégalité est en fait une égalité.

Exercices d'application

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Démontrer que : $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\sqrt{n}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}$.

Solution :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}$.

> Méthode :
> On effectue un choix judicieux pour les a_i et les b_i (vous n'êtes pas habitués).

On pose $a_i=x_i$ et $b_i=1$ pour tout entier i compris entre 1 et n.

On obtient alors : $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\sqrt{n}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}$.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.
Démontrer que : $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\geqslant n^2$.

Solution :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}}$.

On pose $a_i=\sqrt{x_i}$ et $b_i=\frac{1}{\sqrt{x_i}}$ pour tout entier i compris entre 1 et n.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} 1\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}\right)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2}$$

$$|\,n\,| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

$$n \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

$$n^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$$ (on élève au carré les deux membres qui sont tous les deux positifs ou nuls)

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Soit $(x_1\,;\,x_2\,;\,...\,;\,x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$.

Soit σ une permutation (bijection) de l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,...\,;\,n\}$ dans lui-même.

Démontrer que : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i x_{\sigma(i)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

Définition :

Une **permutation** de l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; ... ; n\}$ est une application σ de *E* dans *E* telle que deux éléments distincts ont deux images distinctes (c'est-à-dire que pour tout couples $(i ; j)$ d'éléments de *E*, on : $i \neq j \Rightarrow \sigma(i) \neq \sigma(j)$).

Commentaire :

Le mot permutation vient du verbe « permuter » qui signifie « échanger », « changer d'ordre ».
Une permutation sur l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; ... ; n\}$ a pour effet de mettre les éléments dans un autre ordre.

Plutôt que de dire que deux éléments distincts de *E* ont deux images distinctes, on peut dire que chaque élément de *E* admet un unique antécédent.

Information (propriété) :

Le nombre de bijections ou de permutations de *E* est égal à $n\,!$.

La démonstration de cette propriété est assez simple.

Nous n'utiliserons cependant pas cette propriété dans l'exercice.

Lien avec notre exercice :

Notre bijection est ici juste pour changer l'ordre des indices, quel que soit l'ordre.

Question : « Quel est l'intérêt d'une bijection ? »

Retrouver le résultat par une autre manière en développant $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_{\sigma(i)}\right)^2$.

Solution :

Exemple pour $n = 4$ (afin de mieux comprendre).

Donnons un exemple de bijection σ de {1 ; 2 ; 3 ; 4} dans lui-même.

L'application σ définie de {1 ; 2 ; 3 ; 4} dans lui-même par $\sigma(1)=3$, $\sigma(2)=1$, $\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=2$ est une bijection (on peut donner une illustration à l'aide d'un diagramme sagittal).

Dans ce cas, on a alors : $\sum_{i=1}^{4} {x_{\sigma(i)}}^2 = {x_3}^2 + {x_1}^2 + {x_4}^2 + {x_2}^2$ (les termes ne sont plus écrites dans le même ordre) et $\sum_{i=1}^{4} x_i x_{\sigma(i)} = x_1x_3 + x_2x_1 + x_3x_4 + x_4x_2$).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2}$.

On pose $a_i = x_i$ et $b_i = x_{\sigma(i)}$ pour tout entier i compris entre 1 et n.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i x_{\sigma(i)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_{\sigma(i)}}^2}$.

Par suite, on a : $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i x_{\sigma(i)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$.

On utilise le lemme suivant : $\sum_{i=1}^{n} {x_{\sigma(i)}}^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

Il s'agit d'une même somme écrite de deux manières différentes.

Cela donne enfin $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i x_{\sigma(i)}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.