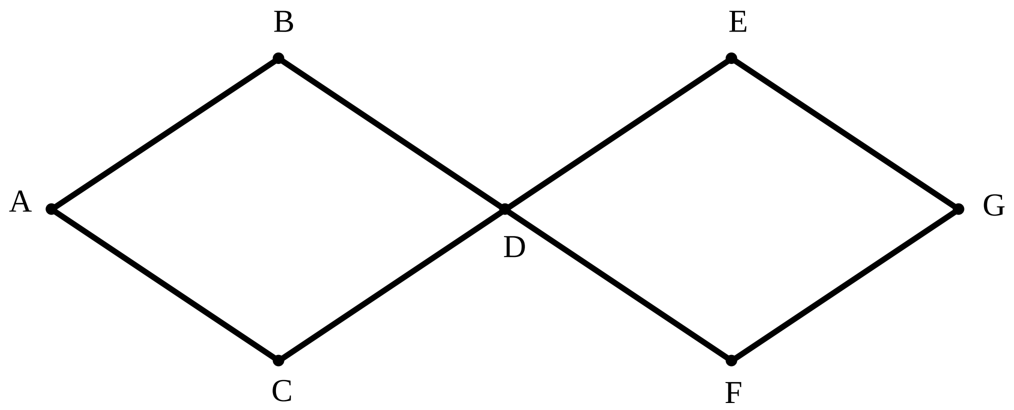
Le dessous-de-plat articulé

Étude d’un lieu géométrique

Un dessous-de-plat est constitué de six barres métalliques rigides, de différentes longueurs, assemblées et articulées entre elles pour former deux losanges de côté 1 (voir la figure ci-dessous).
Pour simplifier l’étude on suppose que les barres sont de largeur nulle. Les barres sont alors représentées par les segments [AB] , [AC] , [BF] , [CE] , [EG] et [FG].
Le point A est supposé fixe. On déplace le point G le long d’une demi-droite d’extrémité A ; on constate que si le dessous de plat passe de la position de repli complet à l’extension complète, le point G décrit un segment de droite.



Partie 1 : travail sur ordinateur

1°) Réaliser la figure dynamique sur *Geogebra*.

Conseils pour faire la figure sur Geogebra

- Créer le point A de sorte qu’il soit fixe et qu’il soit confondu avec l’origine du repère.

- Créer le point D mobile sur l’axe des abscisses.

- Créer le point G symétrique de A par rapport à D.

- Créer les points B, C, E, F comme points d’intersection des cercles de centre A, D, G et de rayon 1.

- Faire en sorte que les cercles ne s’affichent pas ; pour cela, cliquer sur chaque cercle et décocher « afficher l’objet ».

On fait bouger le point G, par conséquent le point B, sur l’axe des abscisses.
.
2°) À l’aide de la commande « trace activée », faire apparaître l’ensemble des points E lors de la déformation du dessous de plat.

Partie 2 : travail mathématique sur copie

On suppose que le plan est orienté de sorte que le triangle ADB soit direct et l'on munit le plan du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{A}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

On note *t* la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{DAB}}$.

1°) Exprimer les coordonnées de B en fonction de *t*.

2°) Exprimer les coordonnées de D en fonction de *t*.

3°) Exprimer les coordonnées de E en fonction de *t*.

En déduire que les coordonnées de E vérifient une égalité de la forme $\frac{{x_{\mathrm{E}}}^2}{a^2}+\frac{{y_{\mathrm{E}}}^2}{b^2}=1$ où *a* et *b* sont deux réels que l'on précisera.

Nous admettrons une courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé où *a* et *b* sont deux réels strictement positifs fixés est une ellipse de centre O et d'axes O*x* et O*y*.

Le point E décrit donc un arc d'ellipse.

Remarque :

On peut tracer une courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sur *Geogebra* directement en rentrant l'équation sous cette forme dans la barre algèbre.