TS1

Contrôle du mardi 19 mai 2015
(50 minutes)

Prénom : …………………………………………. **Nom :** ………………… **Note : …. / 20**

I. (2 points : 1 point + 1 point)

Les scores en saut en hauteur X d'un groupe de 600 filles donnés en centimètres définissent une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 115 et de variance 110.
Les scores en saut en hauteur Y d'un groupe de 800 garçons donnés en centimètres définissent une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 130 et de variance 225.

1°) Estimer le nombre de filles dont le score est supérieur ou égal à la moyenne des garçons.

………

………

………

………

2°) Estimer le nombre de garçons dont le score est supérieur ou égal à la moyenne des filles.

………

………

………

………

II. (3 points)

La chaîne de production d'un laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.
Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.
On prélève un échantillon de 500 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 500 tirages successifs avec remise.
Calculer la probabilité que le nombre de comprimés conformes soit compris entre 450 et 460 (au sens large).
Donner la valeur arrondie au millième.

………

………

………

………

III. (5 points : 2 points + 3 points)

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir et emballer des cônes de glace.
Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque cône associe la masse (exprimée en grammes) de glace qu'il contient.
On suppose que X suit une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type σ.

1°) Dans cette question, on suppose que $\sigma = 2\sqrt{2}$. On choisit au hasard un cône rempli de glace.
Calculer la probabilité que la masse de glace qu'il contient soit comprise entre 95 g et 105 g (donner la valeur arrondie au millième).

………

2°) Un cône est considéré comme « bon » lorsque la masse de glace en grammes qu'il contient appartient à l'intervalle [95 ; 105].
Déterminer la valeur de σ telle que la probabilité de l'événement « le cône est bon » soit égale à 0,95 (donner la valeur arrondie au millième).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (4 points)

Dans un club, on considère que les scores de saut en hauteur des adhérents « filles » et « garçons » se distribuent selon la loi normale :
- le score X en centimètres d'une fille suit la loi normale d'espérance 180 et d'écart-type 10 ;
- le score Y en centimètres d'un garçon suit la loi normale d'espérance 190 et d'écart-type 15.

Parmi les adhérents, on compte 40 % de filles et 60 % de garçons.
Quelle est la probabilité qu'un adhérent pris au hasard ait un score dépassant de 20 cm la moyenne de sa catégorie ?
On donnera la valeur arrondie au millième.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

Un boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
1°) On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913.
Calculer λ (valeur exacte).
Dans la suite, on supposera que λ a la valeur trouvée dans cette question.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ? On donnera la valeur arrondie au millième.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 19-5-2015

Ce contrôle n'a pas été bien réussi du tout.

I.

600 filles

800 garçons

X suit la loi normale d'espérance 115 et de variance 110.

Y suit la loi normale d'espérance 130 et de variance 225.

Attention, l'énoncé donne les variances et non les écart-types. Il ne faudra pas l'oublier au moment de passer à la calculatrice.

On rappelle que la moyenne correspond à l'espérance.

1°)

Grâce à la calculatrice, on trouve : $600 \times P(\mathrm{X} \geqslant 130) = 45,7984417...$.

• Pour avoir le résultat le plus précis possible, on a intérêt à calculer $P(\mathrm{X} \geqslant 130)$ au moyen de l'égalité : $P(\mathrm{X} \geqslant 130) = 0,5 - P(115 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 130)$ (obtenue en faisant un schéma si l'on ne se souvient plus de la propriété du cours).

• On tape : 600∗(0,5 – normalFRép(115,130,115,$\sqrt{\ }$(110))).

Donc $600 \times P(\mathrm{X} \geqslant 130) \approx 46$ (valeur arrondie à l'unité)

Donc il y a environ 46 filles dont le score est supérieur ou égal à la moyenne des garçons.

2°)

Grâce à la calculatrice, on trouve : $800 \times P(\mathrm{Y} \geqslant 115) = 673,075791...$.

• Pour avoir le résultat le plus précis possible, on a intérêt à calculer $P(\mathrm{Y} \geqslant 115)$ au moyen de l'égalité : $P(\mathrm{Y} \geqslant 115) = 0,5 + P(115 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 130)$ (obtenue en faisant un schéma si l'on ne se souvient plus de la propriété du cours).

• On tape : 800 ∗ (0,5 + normalFRép(115,130,130, $\sqrt{225}$) .

Donc $800 \times P(\mathrm{Y} \geqslant 115) \approx 673$ (valeur arrondie à l'unité)

Donc il y a environ 673 garçons dont le score est supérieur ou égal à la moyenne des filles.

II.

La probabilité qu'un comprimé soit conforme est égale à $p = P(890 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 920)$.

On ne calcule pas de valeur approchée de *p*. On fera directement les calculs sur la calculatrice.

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de comprimés conformes.

Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et *p*.

$P(450 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 460) = P(\mathrm{Y} \leqslant 460) - P(\mathrm{Y} \leqslant 449)$

Grâce à la calculatrice, on obtient : $P(450 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 460) = 0,445041528...$.

Attention, c'est très long à taper ! Il faut le faire patiemment.

Donc $P(450 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 460) \approx 0,445$ (valeur arrondie au millième)

On fait le maximum de calculs à l'aide de la calculatrice.

III.

1°) $P(95 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 105) \approx 0,923$ (valeur arrondie au millième)

2°)

On pose $\mathrm{Z} = \dfrac{\mathrm{X} - 100}{\sigma}$.

On sait d'après une propriété du cours que Z suit la loi normale centrée réduite.

On a : $95 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 105 \iff -\dfrac{5}{\sigma} \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \dfrac{5}{\sigma}$

Donc :

$$\begin{aligned}P(95 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 105) &= P\left(-\frac{5}{\sigma} \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{5}{\sigma}\right)\\ &= 2P\left(0 \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{5}{\sigma}\right)\\ &= 2P\left(\mathrm{Z} \leqslant \frac{5}{\sigma}\right) - 2P(\mathrm{Z} \leqslant 0)\\ &= 2P\left(\mathrm{Z} \leqslant \frac{5}{\sigma}\right) - 1\end{aligned}$$

Par conséquent : $P(95 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 105) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\mathrm{Z} \leqslant \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}975$.

Soit t le réel tel que $P(\mathrm{Z} \leqslant t) = 0{,}975$.

On a : $\frac{5}{\sigma} = t$ d'où $\sigma = \frac{5}{t}$.

Avec la calculatrice, on obtient : $\sigma = 2{,}55106728...$.

Donc $\sigma \approx 2{,}551$ (valeur arrondie au millième).

Remarque :

On pourrait utiliser la plage de normalité à 95 % : $[\mu - 2\sigma\,;\,\mu + 2\sigma]$.
Ce n'est cependant pas trop conseillé car la plage de normalité est telle que $P(\mu - 2\sigma \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

Autre méthode de Flore Le Baron (un peu maladroite, mais juste) :

On pose $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X} - 100}{\sigma}$.
On sait d'après une propriété du cours que Z suit la loi normale centrée réduite.

On a : $95 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 105 \Leftrightarrow -\frac{5}{\sigma} \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{5}{\sigma}$

Donc :

$$\begin{aligned}P(95 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 105) &= P\left(-\frac{5}{\sigma} \leqslant \mathrm{Z} \leqslant \frac{5}{\sigma}\right)\\ &= 1 - 2P\left(\mathrm{Z} \leqslant -\frac{5}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent : $P(95 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 105) = 0{,}95 \Leftrightarrow P\left(\mathrm{Z} \leqslant -\frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}025$.

Soit u le réel tel que $P(\mathrm{Z} \leqslant u) = 0{,}025$.

On a : $-\frac{5}{\sigma} = u$ d'où $\sigma = -\frac{5}{u}$.

Avec la calculatrice, on obtient : $\sigma = 2{,}55106728...$.

Donc $\sigma \approx 2{,}551$ (valeur arrondie au millième).

Autre méthode de Godefroy Ferrand (moins bonne, mais pas inintéressante). Je tape ici l'explication qu'il a notée à ma demande après avoir corrigé sa copie.
Je n'avais pas compris comment il s'y était pris pour donner le résultat.

J'ai utilisé une méthode dite « empirique » pour parvenir à mon résultat de $\sigma \approx 2{,}551$.
Pour trouver cette valeur, j'ai entré comme fonction dans ma TI-83 Plus : « normalcdf(95,105,100,X) ».
Puis j'ai défini la table comme suit : début $2\sqrt{2}$ et pas de 0,1.
En regardant dans la table, j'ai cherché la première valeur de X pour laquelle la probabilité est supérieure à 0,95.
Ensuite, j'ai affiné le pas pour parvenir au résultat de 2,551.

IV.

X (score en cm d'une fille) suit la loi normale d'espérance 180 et d'écart-type 10.

Y (score en cm d'un garçon) suit la loi normale d'espérance 190 et d'écart-type 15.

On utilise les événements suivants :

F : « l'adhérent est une fille » ;
G : « l'adhérent est un garçon » ;
A : « l'adhérent a un score dépassant de 20 cm la moyenne de sa catégorie ».

On peut éventuellement faire un arbre de probabilités.
F et G constituent un système complet d'événements de l'univers.

Donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}P(\mathrm{A}) &= P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{A/F}) + P(\mathrm{G}) \times P(\mathrm{A/G})\\ &= 0{,}4 \times P(\mathrm{X} \geqslant 200) + 0{,}6 \times P(\mathrm{Y} \geqslant 210)\end{aligned}$$

Avec la calculatrice, on trouve : $P(\mathrm{A}) = 0{,}063826794...$ (calcul à faire d'un coup).

Remarques concernant la calculatrice :

- Pour avoir les résultats de $P(\mathrm{X} \geqslant 200)$ et $P(\mathrm{Y} \geqslant 210)$ avec le maximum de décimales exactes, on écrit plutôt : $P(\mathrm{X} \geqslant 200) = 0{,}5 - P(0 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 200)$ et $P(\mathrm{Y} \geqslant 210) = 0{,}5 - P(0 \leqslant \mathrm{Y} \leqslant 210)$.

- Il n'y a aucun intérêt à écrire $P(\mathrm{X} \geqslant 200) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 200)$ et $P(\mathrm{Y} \geqslant 210) = 1 - P(\mathrm{Y} \leqslant 210)$.
Cette méthode présente un intérêt pour la loi exponentielle mais pas pour la loi normale.

Donc on a : $P(\mathrm{A}) \approx 0{,}064$ (valeur arrondie au millième).

La probabilité qu'un adhérent dépasse de 20 cm la moyenne de sa catégorie est environ égale à 0,064.

V.

1°) D'après l'énoncé, on a : $P(\mathrm{T} \geqslant 30) = 0,913$ donc $\mathrm{e}^{-30\lambda} = 0,913$.

Un certain nombre d'élèves n'a pas su traduire l'énoncé en $P(\mathrm{T} \geqslant 30) = 0,913$.

On obtient : $-30\lambda = \ln 0,913$.

Donc $\lambda = -\dfrac{\ln 0,913}{30}$.

2°) D'après la propriété de durée de vie sans vieillissement, on a :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{T} \geqslant 90 / \mathrm{T} \geqslant 60) &= P(\mathrm{T} \geqslant 60 + 30 / \mathrm{T} \geqslant 60) \\ &= P(\mathrm{T} \geqslant 30) \\ &= 0,913 \end{aligned}$$

3°)

On se place dans le cas d'une année non bissextile (comptant 365 jours).

On a $P(\mathrm{T} \geqslant 365) = \mathrm{e}^{-365\lambda}$ soit $P(\mathrm{T} \geqslant 365) = \mathrm{e}^{\frac{365 \times \ln 0,913}{30}}$.

Grâce à la calculatrice, on trouve : $P(\mathrm{T} \geqslant 365) = 0,330416043...$.

Donc $P(\mathrm{T} \geqslant 365) \approx 0,330$ (valeur arrondie au millième).

On constate que $P(\mathrm{T} \geqslant 365) < 0,5$.

Le vendeur a donc eu tort d'assurer au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an.

On cherche le réel u tel que $P(\mathrm{T} \geqslant u) = \dfrac{1}{2}$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda u} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\lambda u = -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow u = \frac{\ln 2}{\lambda} \\ &\Leftrightarrow u = -\frac{30 \times \ln 2}{\ln 0,913} \quad \text{(car d'après la question 1°), on a : } \lambda = -\frac{\ln 0,913}{30}\text{)} \end{aligned}$$

Grâce à la calculatrice, on trouve $u = 228,461358...$.

On peut dire que l'affirmation du vendeur est vraie au bout de 229 jours.