1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mardi 12 mai 2015
(3 heures)

• Le barème est donné sur 40.

• On répondra directement sur la copie fournie avec le sujet.

• Un certain nombre de questions nécessite une recherche préalable au brouillon. On ne rédigera sur la copie qu'après avoir effectué cette recherche.

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet et, en particulier, de ne rien marquer sur les figures.

I. (4 points)

Cet exercice est un QCM composé de 4 questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau donné sur la feuille de réponses avec les lettres A, B, C correspondant aux réponses choisies.
Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

On considère la suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=-\frac{5}{3}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

On note (v_n) la suite définie par $v_n=\sqrt{u_n}$.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on a :

A. $u_{n+1}-\frac{1}{3}=u_n$ B. $u_n-\frac{1}{3}=u_{n+1}$ C. $\frac{u_n}{3}=u_{n+1}$

2°) Pour tout entier naturel *n*, $1-u_n$ est égal à :

A. $-\frac{n+2}{3}$ B. $\frac{2-n}{3}$ C. $\frac{8-n}{3}$

3°) Pour tout entier naturel *n*, la somme $u_0+u_1+...+u_n$ est égale à :

A. $\frac{n^2-10n}{6}$ B. $\frac{n^2-9n-10}{6}$ C. $\frac{2n^2-18n-20}{3}$

4°) La suite (v_n) est définie à partir de l'indice :

A. 0 B. 5 C. 6

II. (3 points)

Soit A et B deux points distincts fixés du plan.
On pose $AB=a$. On note A_0 le milieu de [AB], A_1 le milieu de $[A_0B]$, A_2 le milieu de $[A_1B]$.
On construit une suite de points A_n tels que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, A_n est le milieu du segment $[A_{n-1}B]$.
On pose $d_0=AA_0$, et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $d_n=A_{n-1}A_n$.

1°) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. On ne demande pas de justifier.
En déduire la nature de la suite (d_n). On répondra par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

2°) Démontrer que l'on a : $\sum_{k=0}^{k=n} d_k=a\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ (*n* étant un entier naturel quelconque).

III. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+2}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel *n* donné, tous les termes de la suite, de l'indice 0 à l'indice *n*.
Parmi les trois algorithmes ci-contre, un seul convient.
Préciser lequel sans justifier la réponse.

Algorithme 1

Saisir *n*
U prend la valeur 1
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  U prend la valeur $\frac{U}{U+2}$
FinPour
Afficher *U*

Algorithme 2

Saisir *n*
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  U prend la valeur 1
  Afficher *U*
  U prend la valeur $\frac{U}{U+2}$
FinPour

Algorithme 3

Saisir *n*
U prend la valeur 1
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  Afficher *U*
  U prend la valeur $\frac{U}{U+2}$
FinPour
Afficher *U*

2°) On admet que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n\neq 0$.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n=1+\frac{1}{u_n}$.
a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) En déduire que, pour tout entier naturel *n*, on a :
$u_n=\frac{1}{2^{n+1}-1}$.

IV. (7 points)

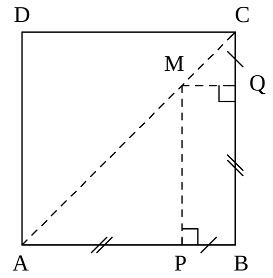
Lors d'un jeu, un joueur doit effectuer 10 parties indépendantes. La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

1°) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.
a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Répondre par une phrase, sans justifier, en donnant toutes les précisions utiles.
b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi au millième.
c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au plus 5 parties ? Le résultat sera arrondi au millième.
d) Calculer l'espérance mathématique de X.

2°) Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €. Chaque partie perdue lui fait perdre 2 €.
On note Y le gain algébrique du joueur en euros (en tenant compte de la mise de 30 €).
a) Exprimer Y en fonction de X.
b) Calculer l'espérance mathématique de Y.
c) Calculer la probabilité pour le joueur d'avoir un gain strictement supérieur à 10 €.
Le résultat sera arrondi au millième.

V. (11 points)

Soit ABCD un carré de côté 1. Pour tout point M du segment [AC], on note P et Q ses projetés orthogonaux respectivement sur les droites (AB) et (BC). On pose $x = \text{AP}$. Aucune figure n'est demandée sur la copie.



1°) Dans cette question, M est un point quelconque de [AC].
On pourra utiliser directement les résultats suivants : $\text{BQ} = x$, $\text{BP} = 1 - x$, $\text{CQ} = 1 - x$.
a) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\text{DM}} \cdot \overrightarrow{\text{PB}}$ et $\overrightarrow{\text{DM}} \cdot \overrightarrow{\text{BQ}}$ en fonction de *x*.
b) En déduire que la droite (DM) est perpendiculaire à la droite (PQ).

2°) Dans cette question, M est un point quelconque de [AC].
Démontrer que le produit scalaire $\overrightarrow{\text{DP}} \cdot \overrightarrow{\text{DQ}}$ est indépendant de *x*.

3°) Dans cette question, on place M au milieu de [AC] ; P et Q sont alors les milieux respectifs de [AB] et [BC]. On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{\text{PDQ}}$.
À l'aide de la question précédente, calculer $\cos\theta$.

4°) Dans cette question, M est un point quelconque de [AC].
On note I le milieu du segment [PQ].
a) Exprimer DI^2 en fonction de *x*.
On mettra en évidence la formule utilisée et l'on donnera le résultat final sous forme développée réduite après avoir effectué les calculs au brouillon.
b) Déterminer le (ou les) réel(s) *x* tel(s) que $\text{DI} = \sqrt{2}\,\text{PQ}$ (valeurs exactes).

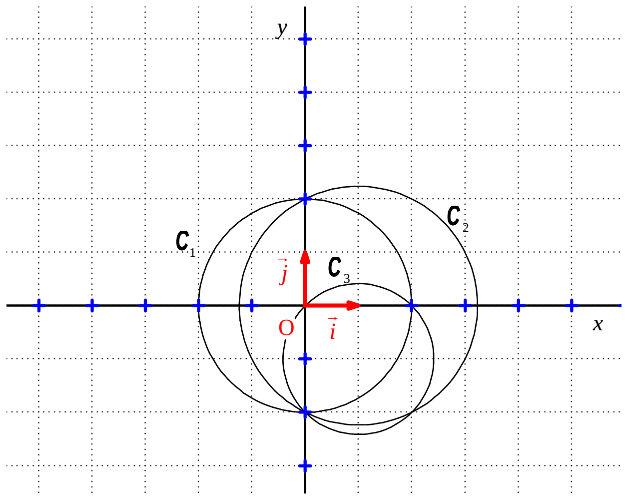
Dans les exercices **VI** et **VII**, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

VI. (5 points)

1°) Attribuer les équations cartésiennes suivantes à chacun des cercles du graphique ci-dessous.

a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$; c) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$.

On justifiera uniquement pour l'équation b).



2°) On note *D* la droite d'équation cartésienne $x - 2y + 4 = 0$.
Démontrer que *D* est tangente à l'un des trois cercles précédents.

VII. (5 points)

On donne les points E et F de coordonnées respectives $(2\,;0)$ et $\left(1\,;\sqrt{3}\right)$.
On note Γ le cercle de centre E passant par O et Δ la droite passant par O et perpendiculaire à (OF).

1°) Déterminer une équation cartésienne de Γ et de Δ.

2°) Vérifier rapidement que $\text{F} \in \Gamma$ (en une ligne).

3°) La droite Δ coupe le cercle Γ en O et en un point G distinct de O.
Déterminer par le calcul les coordonnées de G.

4°) On se propose de retrouver les coordonnées de G par une autre méthode.
Démontrer que [FG] est un diamètre de Γ. En déduire les coordonnées de G.

$1^{\text{ère}}$ S1

Nom : ……………………

Prénom : …………………

Contrôle du 12 mai 2015
Copie à rendre

I	II	III	IV	V	VI	VII	Total/40	Total/20

I. (4 points)

Question	1	2	3	4	Total
Réponse					

II. (3 points)

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$ ……………………………………… (une seule égalité)

……

……

……

2°) ………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (5 points)

1°) Algorithme choisi : algorithme N°….

2°) ………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (7 points)

1°) a) ……………………………………………

……………………………………………

b) ……………………………………………

c) ……………………………………………

d) ……………………………………………

2°) a) ……………………………………………

b) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

c) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

V. (11 points)

1°) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

Suite de l’exercice V.

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

2°) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

3°) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

4°)

a) ……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

b) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

VI. (5 points)

1°) a) …… b) …… c) ……

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

VII. (5 points)

1°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

2°) ……………………………………………………………………

3°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

4°) ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Un élève m'a demandé durant l'épreuve si, pour l'exercice **V**, on pouvait « créér » (introduire) de nouveaux points.
J'ai dit que je ne préférais pas mais que je ne m'y opposais pas complètement.

Corrigé du contrôle du 12-5-2015

I.

Finalement, lors de la correction, aucun point n'a été retiré en cas de réponse fausse.

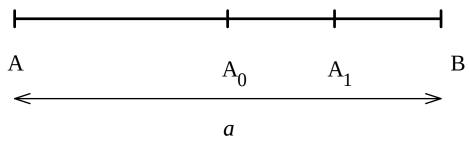
Question	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
Réponse	A	C	B	B	

II.

Il semble que beaucoup d'élèves n'aient pas bien compris la notation $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ et n'aient pas vu qu'il s'agissait d'une distance (distance entre les points A_{n-1} et A_n).
Peut-être aurait-on dû écrire dans l'énoncé « On note d_n la distance $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ ».

Peut-être aurait-on dû donner d'autres noms aux points A_0, A_1, A_2 n'utilisant pas la lettre A.

Il fallait évidemment faire une figure pour bien comprendre.
Il s'agit d'un « principe de dichotomie » (partage en 2).



1°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_{n+1} = \dfrac{1}{2} d_n$

On en déduit que (d_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $d_0 = \dfrac{a}{2}$.

2°)

Il semble que certains élèves n'aient pas vu qu'il y avait le symbole Σ qui désigne une somme. On rappelle que $\sum_{k=0}^{k=n} d_k = d_0 + d_1 + ... + d_n$.

$$\sum_{k=0}^{k=n} d_k = d_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$ (formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)

$$= \frac{a}{\cancel{2}} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\cancel{2}}}$$ (attention : les parenthèses autour de $\frac{1}{2}$ sont indispensables)

$$= a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$= a\left(1-\frac{1^{n+1}}{2^{n+1}}\right)$$

$$= a\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Cet exercice est à relier au paradoxe de Zénon d'Élée (la flèche qui n'atteint jamais la cible).

III.

1°) L'algorithme qui convient est l'algorithme 3.

L'algorithme 1 affiche seulement la valeur de u_n pour le n particulier demandé. Or on veut afficher toutes les valeurs de la suite (u_n) jusqu'au n choisi.

C'est donc l'algorithme 3 qu'il faut utiliser puisqu'il affiche toutes les valeurs prises par la suite de u_0 à u_{n-1} (pour la boucle de 1 à n) ainsi que la valeur de u_n.

2°)

La suite (v_n) est une suite « seconde » (mauvaise expression de Marius Siwertz le 19-5-2015) ou suite « auxiliaire ».

a)

Il ne faut pas se perdre dans les calculs ; il s'agit de simples calculs de quotients.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{u_n}{u_n+2}}$$

$$= 1 + \frac{u_n+2}{u_n}$$ (inversion du quotient $\frac{u_n}{u_n+2}$)

$$= \frac{2u_n+2}{u_n}$$

$$= 2 \times \frac{u_n+1}{u_n}$$

$$= 2 \times \left(\frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n}\right)$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

$$= 2v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1 + \frac{1}{u_0} = 2$.

b)

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times 2^n$$
$$= 2 \times 2^n$$
$$= 2^{n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + \frac{1}{u_n} = 2^{n+1}$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{u_n} = 2^{n+1} - 1$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$ (par passage à l'inverse dans l'égalité précédente).

Grâce à la suite (v_n), on a obtenu l'expression explicite de u_n en fonction de n.

IV.

1°) X : variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur

a) X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{4}$.

b)

$$\begin{aligned} P(\text{"le joueur gagne au moins une partie"}) &= P(\mathrm{X}\geqslant 1)\\ &=1-P(\mathrm{X}=0)\\ &=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\\ &=0{,}94368648529053 \quad \text{(il s'agit d'un nombre décimal)} \end{aligned}$$

Donc $P(\text{"le joueur gagne au moins une partie"})\approx 0{,}944$ (valeur arrondie au millième).

c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au plus 5 parties ? Le résultat sera arrondi au millième.

$$\begin{aligned} P(\text{"le joueur gagne au plus 5 parties"}) &= P(\mathrm{X}\leqslant 5)\\ &=0{,}98027229310903 \quad \text{(il s'agit d'un nombre décimal)} \end{aligned}$$

Donc $P(\text{"le joueur gagne au plus 5 parties"})\approx 0{,}980$ (valeur arrondie au millième).

d) $\mathrm{E}(\mathrm{X})=np=10\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

2°)

a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} &= 8\mathrm{X}-2(10-\mathrm{X})-30\\ &=10\mathrm{X}-50 \end{aligned}$$

Attention, contrairement à ce que certains élèves ont écrit, Y ne suit pas la loi binomiale.
On ne peut donc pas utiliser les formules valables pour les variables aléatoires qui suivent la loi binomiale.

> On peut remarquer que l'on perd de l'argent à partir de 5 lancers.
>
> On aurait d'ailleurs pu poser la question : « Calculer la probabilité de perdre de l'argent. »

b)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{Y}) &= \mathrm{E}(10\mathrm{X}-50)\\ &=10\mathrm{E}(\mathrm{X})-50\\ &=10\times\frac{5}{2}-50\\ &=-25 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}>10 &\Leftrightarrow 10\mathrm{X}>60\\ &\Leftrightarrow \mathrm{X}>6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{"le joueur gagne plus de 10 euros"}) &= P(\mathrm{Y}>10)\\ &=P(\mathrm{X}>6)\\ &=1-P(\mathrm{X}\leqslant 6)\\ &=0{,}00350570678711 \end{aligned}$$

Donc $P(\text{"le joueur gagne plus de 10 euros"})\approx 0{,}004$ (valeur arrondie au millième).

V.

> Cet exercice faisait intervenir les différentes expressions du produit scalaire.

> **Remarque générale, valable pour tout l'exercice :**
>
> Il faut bien mettre en évidence les liens logiques (déductions).

1°)

> Pour résoudre les équations a) et b), le plus simple était d'utiliser la projection orthogonale.
> L'une des difficultés consistait à voir les projetés orthogonaux sur la figure.

a) Par projection orthogonale sur (PB), on obtient : $\overrightarrow{\mathrm{DM}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x(1-x)$.

On évite de « créer » un point pour résoudre cette question.

b) Par projection orthogonale sur (BQ), on obtient : $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = -x(1-x)$.

c)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{DM} \cdot \left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}\right) \\ &= \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BQ} \\ &= x(1-x) - x(1-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit que $(DM) \perp (PQ)$.

Certains élèves ont utilisé un raisonnement par équivalence.
Ce raisonnement ne convient pas ici ; le seul raisonnement correct est un raisonnement déductif.

2°)

La seule méthode pour résoudre cette question consiste à utiliser une décomposition.

On ne peut pas utiliser de méthode par projeté orthogonal.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}\right) \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CQ} \\ &= 0 + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC} + 0 \\ &= 0 + 1 \times (1-x) + x \times 1 \\ &= x + 1 - x \\ &= 1\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ}$ est indépendant de x.

3°) M étant le milieu de [AC], P et Q sont les milieux respectifs de [AB] et [CB] et on a $DP = DQ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (on utilise le théorème de Pythagore).

D'après la définition du produit scalaire de deux vecteurs non nul, on a $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = DP \times DQ \times \cos\theta$.
Or d'après la question 2°), $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = 1$.

Par conséquent, on a : $\dfrac{5}{4}\cos\theta = 1$.

On en déduit que $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$.

Autre méthode avec la formule du côté (qui n'est cependant pas dans l'esprit de la question, puisque l'on demandait d'utiliser le résultat de ma question 2°) :

On a : $PQ^2 = DP^2 + DQ^2 - 2DP \times DQ \times \cos\widehat{DEP}$ (1).

(1) donne $\cos\widehat{DEP} = \dfrac{DP^2 + DQ^2 - PQ^2}{2DP \times DQ}$.

On a : $DP = DQ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et $PQ = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

On obtient : $\cos\widehat{DEP} = \dfrac{4}{5}$.

4°) a)

1[ère] méthode :

En appliquant la formule de la médiane, I étant le milieu de [PQ], on a : $DP^2 + DQ^2 = 2DI^2 + \dfrac{PQ^2}{2}$.

On obtient : $1 + x^2 + 1 + (1-x)^2 = 2DI^2 + \dfrac{1}{2}\left[x^2 + (1-x)^2\right]$.

Après calculs, on obtient : $DI^2 = \dfrac{2x^2 - 2x + 5}{4}$.

2[e] méthode :

Cette méthode, plus courte, a été employée par quelques élèves.

D'après une formule du cours, on a : $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ} = DI^2 - \dfrac{PQ^2}{4}$.

Donc $DI^2 - \dfrac{PQ^2}{4} = 1$ d'où $DI^2 = 1 + \dfrac{PQ^2}{4}$

On obtient $DI^2 = 1 + \dfrac{x^2 + (1-x)^2}{4}$.

On retrouve l'expression $DI^2 = \dfrac{2x^2 - 2x + 5}{4}$ obtenue avec la 1[ère] méthode.

b)

On cherche x tel que $DI = \sqrt{2}DQ$ (1).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow DI^2 = 2DQ^2 \text{ car DI et DQ, étant des longueurs, sont deux nombres positifs} \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x + 5}{4} = 2\left(2x^2 - 2x + 1\right) \\ &\Leftrightarrow 14x^2 - 14x + 3 = 0\end{aligned}$$

La résolution de cette équation du second degré mène à $x = \dfrac{7+\sqrt{7}}{14}$ ou $x = \dfrac{7-\sqrt{7}}{14}$ (on utilise le discriminant réduit).
Ces deux solutions conviennent car les deux nombres sont bien tous les deux dans l'intervalle $[0\,;1]$.

VI.

1°) a) $\mathcal{C}_1$ b) $\mathcal{C}_3$ c) $\mathcal{C}_2$

On note Γ le cercle d'équation $x^2+y^2-2x+2y=0$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\begin{aligned} M\in\Gamma &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+1)^2-1=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2 \end{aligned}$$

Γ est donc le cercle de centre $\Omega(1\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$. On en déduit que Γ est confondu avec le cercle $\mathcal{C}_3$.

2°)

D a pour équation réduite $y=\frac{1}{2}x+2$.
Par construction, on conjecture que D est tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ au point $A(0\,;2)$.

On peut aussi utiliser la calculatrice pour tracer les cercles et la droite.

Sur la calculatrice TI 83 : Graph $\boxed{\text{2nde}}$ Draw
On prend la fenêtre graphique définie par les inégalités $-5\leqslant x\leqslant 5$ et $-3\leqslant y\leqslant 3$.
Circle(0 ; 0 ; 2)
Circle(1 ; 0 ; $\sqrt{5}$)
Circle$\left(1\,;-1\,;\sqrt{2}\right)$

Dans $Y_1=$, on trace la droite D d'équation $y=\frac{x}{2}+2$.
On observe que la droite D semble tangente au cercle $\mathcal{C}_2$.

1ère méthode :

Soit A le point de coordonnées $(0\,;2)$.

→ On vérifie tout d'abord que A est un point de $\mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned} {x_A}^2+{y_A}^2-2x_A-4 &= 0^2+2^2-0-4 \\ &= 4-4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $A\in\mathcal{C}_2$.

→ On vérifie ensuite que A est un point de *D*.

$x_A-2y_A+4=0-2\times2+4=0$ donc $A\in D$

→ On démontre enfin que $D\perp(\Omega A)$.

Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(2\,;1)$.

$\overrightarrow{\Omega A}(-1\,;2)$

On a : $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=2\times(-1)+2\times1=0$.

On en déduit que $D\perp(\Omega A)$.

Finalement, on en déduit que D est tangente à $\mathcal{C}_2$ au point A.

2e méthode :

Les abscisses des points d'intersection de D et de $\mathcal{C}_2$ sont les solutions de l'équation

$x^2+\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2-2x-4=0$ (1).

On dit que (1) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de D et de $\mathcal{C}_2$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{4}\cancel{+2x}\cancel{+4}\cancel{-2x}\cancel{-4}=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5x^2}{4}=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

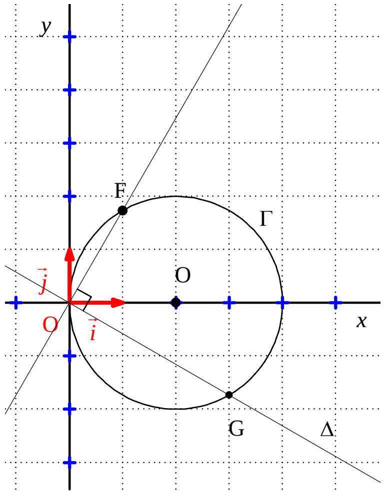
L'équation (1) n'admet qu'une seule solution donc l'intersection de D et de $\mathcal{C}_2$ est constitué d'un seul point (à savoir le point $A(0\,;2)$).

VII.

$E(2\,;0)$; $F\left(1\,;\sqrt{3}\right)$

Γ : cercle de centre E passant par O

Δ : droite passant par O et perpendiculaire à (OF)



1°)

● Déterminons une équation cartésienne du cercle Γ.

Γ a pour centre E et passe par O donc son rayon est $\text{OE} = 2$.

Une équation de Γ s'écrit $(x-2)^2 + y^2 = 4$.
Une équation cartésienne de Γ est donc $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

● Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\begin{aligned} \text{M} \in \Delta &\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OF}} \cdot \overrightarrow{\text{OM}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \times x + y \times \sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de Δ est $x + y\sqrt{3} = 0$.

2°) $x_{\text{F}}{}^2 + y_{\text{F}}{}^2 - 4x_{\text{F}} = 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 4 = 0$ donc $\text{F} \in \Gamma$.

3°)

Δ a pour équation $y = -\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Les abscisses des points de Δ et Γ sont les solutions de l'équation $x^2 + \left(-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 - 4x = 0 \quad (1)$.

On dit que (1) est l'équation aux abscisses des points d'intersection de Δ et Γ.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 + \frac{x^2}{3} - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x^2}{3} - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3 \end{aligned}$$

Les points d'intersection de Δ et Γ sont $\text{O}(0\,;\,0)$ et $\text{G}\left(3\,;\,-\sqrt{3}\right)$ (on calcule l'ordonnée du point G grâce à l'équation réduite de la droite Δ : $y_{\text{G}} = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$).

4°) Le triangle FOG est inscrit dans le cercle Γ (les points O, F, G appartiennent à Γ).
De plus il est rectangle en O.
On en déduit que [FG] est un diamètre de Γ (car si un triangle est rectangle, alors son cercle a pour diamètre l'hypoténuse.
Ainsi E est le milieu de [FG].

$$\begin{cases} x_{\text{E}} = \dfrac{x_{\text{F}} + x_{\text{G}}}{2} \\ y_{\text{E}} = \dfrac{y_{\text{F}} + y_{\text{G}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{1 + x_{\text{G}}}{2} \\ 0 = \dfrac{\sqrt{3} + y_{\text{G}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\text{G}} = 3 \\ y_{\text{G}} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

On retrouve que G a pour coordonnées $\left(3\,;\,-\sqrt{3}\right)$.