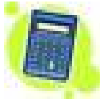
1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 17-4-2015 (45 minutes)



Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : …….. **/ 20**

Dans les deux exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. (14 points : 1°) 1 + 1 ; 2°) 4 points ; 3°) 4 points ; 4°) 4 points)

On considère les points $\text{A}(-1\,;3)$, $\text{B}(-2\,;5)$ et $\text{C}(3\,;5)$.

1°) Compléter : $\overrightarrow{\text{AB}}(\ldots\ldots\ ;\ldots\ldots)$ $\overrightarrow{\text{AC}}(\ldots\ldots\ ;\ldots\ldots)$

Compléter l'égalité suivante. On écrira seulement deux étapes de calcul puis le résultat.

$\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

En déduire la nature du triangle ABC en étant le plus précis possible. On attend une seule phrase.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
On commencera par définir clairement le cercle Γ à l'aide d'une phrase puis on effectuera la recherche en 3 étapes de calcul (avec la rédaction adéquate).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - x + 4y = 0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

4°) Soit Δ la médiatrice du segment [OC].
Déterminer une équation cartésienne de Δ.
On commencera par définir clairement la droite Δ puis on effectuera la recherche en 3 étapes de calcul (avec la rédaction adéquate).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (6 points)

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\mathrm{A}(-2\,;0)$ passant par O.

On note Δ la droite passant par O et de coefficient directeur m où m est un réel fixé.
La droite Δ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point K.
Exprimer les coordonnées de K en fonction de m.

Bonus (suite de l'exercice II, à traiter ci-dessus s'il reste de la place ou sur une feuille à part) :

Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J du cercle $\mathcal{C}$ et du cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon 1.
On prendra $y_{\mathrm{I}} > 0$.

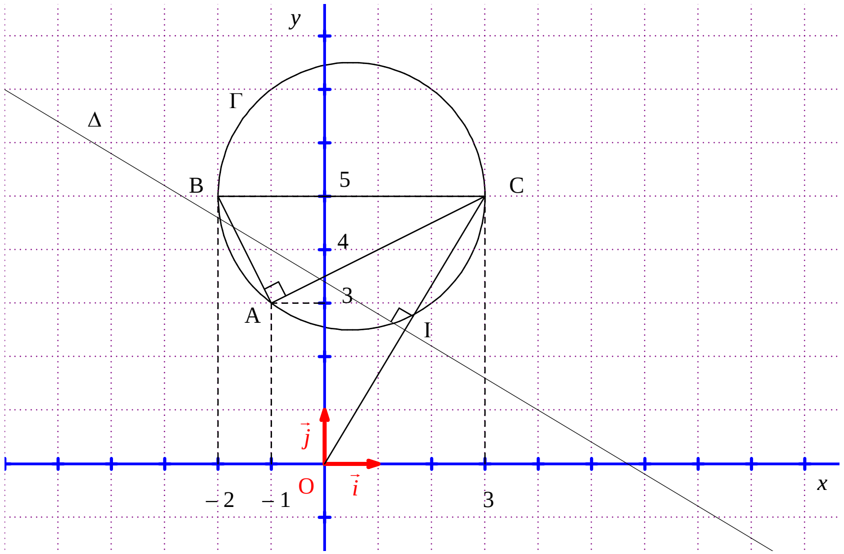
Corrigé du contrôle du 17-4-2015

Ce contrôle n'a pas été bien réussi du tout.
Il aurait fallu lire la fiche sur les mots « rayon » et « diamètre ».
Il aurait fallu apprendre avec plus de soin les rédactions du chapitre.
Il aurait fallu lire la fiche « droites remarquables dans un triangle ».
Il aurait fallu lire la fiche sur les notations en géométrie (notation de segment, de longueur).

Dans les deux exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I.

On considère les points $\mathrm{A}(-1;3)$, $\mathrm{B}(-2;5)$, $\mathrm{C}(3;5)$.



1°) Compléter : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-1;2)$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(4;2)$

Compléter l'égalité suivante. On écrira seulement deux étapes de calcul puis le résultat.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -1\times 4 + 2\times 2 = 0$

En déduire la nature du triangle ABC en étant le plus précis possible. On attend une seule phrase.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont orthogonaux et, par suite, le triangle ABC est rectangle en A.

2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
On commencera par définir clairement le cercle Γ à l'aide d'une phrase puis on effectuera la recherche en 3 étapes de calcul (avec la rédaction adéquate).

Comme le triangle ABC est rectangle en A, donc Γ a pour diamètre l'hypoténuse [BC].

[BC] est donc un diamètre du cercle Γ et non le diamètre du cercle Γ.

Il faut mettre des crochets dans la notation du segment [BC].

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in\Gamma \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=0\\
&\Leftrightarrow (x+2)\times(x-3)+(y-5)(y-5)=0\\
&\Leftrightarrow x^2-3x+2x-6+y^2-5y-5y+25=0\\
&\Leftrightarrow x^2+y^2-x-10y+19=0
\end{aligned}$$

3°) Démontrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne $x^2+y^2-x+4y=0$ est un cercle dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}\in\mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow x^2+y^2-x+4y=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+(y+2)^2-4=0\\
&\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{17}{4}
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-2\right)$ et de rayon $r=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

4°) Soit Δ la médiatrice du segment [OC].
Déterminer une équation cartésienne de Δ.
On commencera par définir clairement la droite Δ puis on effectuera la recherche en 3 étapes de calcul (avec la rédaction adéquate).

La droite Δ est la droite passant par le milieu I de [OC] et perpendiculaire à (OC).

$\mathrm{I}\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ (ou $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CO} = 0$ ou $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ ou $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CO} = 0$; on obtient la même équation cartésienne aux signes près)

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{3}{2}\right)\times 3+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)\times 5=0$ (rappel : O est l'origine du repère donc a pour coordonnées (0 ; 0))

$\Leftrightarrow 3x-\dfrac{9}{2}+5y-\dfrac{25}{2}=0$

$\Leftrightarrow 3x+5y-17=0$

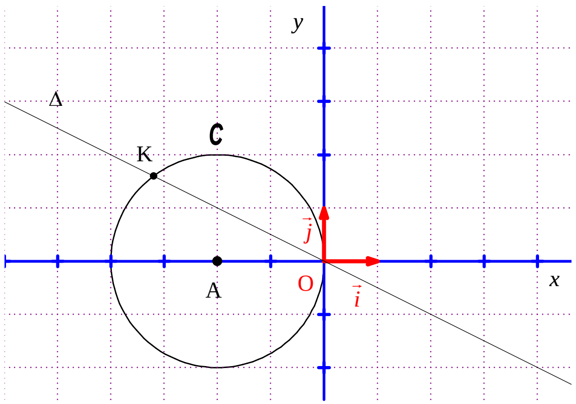
Δ a pour équation cartésienne $3x+5y-17=0$.

Il n'est pas nécessaire de dire que $\overrightarrow{OC}$ est un vecteur normal à Δ.

II.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(-2\,;0)$ passant par O.

On note Δ la droite passant par O et de coefficient directeur *m* où *m* est un réel fixé.
La droite Δ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point K.
Exprimer les coordonnées de K en fonction de *m*.



Cet exercice demandait d'élaborer une démarche.
Il n'a pas été bien réussi.

On va résoudre le problème en trois étapes.

① On détermine une équation de la droite Δ.

② On détermine une équation du cercle $\mathcal{C}$.

③ Avec les deux équations, on calcule les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ.

La droite Δ passe par O et a pour coefficient directeur *m* donc Δ a pour équation $y = mx$.

On donne directement une équation de Δ ; il n'y a pas besoin d'expliquer.
On se réfère à la propriété du cours sur l'équation d'une droite de coefficient directeur donné passant par un point donné : $y = m(x - x_O) + y_O$.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour rayon $OA = 2$.

A a pour coordonnées $(-2\,;0)$; il est inutile de détailler davantage le calcul de OA.
$OA = |-2| = 2$

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation $(x+2)^2 + y^2 = 4$ soit $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

On peut donner directement une équation du cercle $\mathcal{C}$ sans refaire toute la démarche avec un point $M(x\,;y)$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ sont les solutions de l'équation $x^2 + (mx)^2 + 4x = 0$ (1).

• On remplace *y* par *mx* dans l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

• Il est tout à fait possible de raisonner par système.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ sont les solutions du système $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ y = mx \end{cases}$.

Comme c'est un système non linéaire on le résout par substitution.

• On ne peut pas s'en sortir en écrivant l'équation $x^2 + y^2 + 4x = mx$ qui ne conduit à rien (donc ne pas écrire l'équation $x^2 + y^2 + 4x = mx$).

(1) est une équation avec paramètre (le paramètre est m).

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow x^2+m^2x^2+4x=0\\
&\Leftrightarrow x^2\left(1+m^2\right)+4x=0\\
&\Leftrightarrow x\times\left[x\left(1+m^2\right)+4\right]=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x\left(1+m^2\right)+4=0\\
&\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=-\frac{4}{m^2+1} \quad (\text{car } m^2+1\neq 0)
\end{aligned}
$$

L'abscisse du point K est donc égale à $x_{\mathrm{K}}=-\dfrac{4}{m^2+1}$.

On calcule l'ordonnée de K en utilisant l'équation réduite de Δ :

$$y_{\mathrm{K}}=mx_{\mathrm{K}}=-\frac{4m}{m^2+1}$$

Conclusion : K a pour coordonnées $\left(-\dfrac{4}{m^2+1}\,;-\dfrac{4m}{m^2+1}\right)$.

On peut écrire l'égalité d'ensembles suivante : $\mathcal{C}\cap\Delta=\{\mathrm{O}\,;\mathrm{K}\}$.

Bonus (à traiter ci-dessus s'il reste de la place ou sur une feuille à part) :

Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J du cercle $\mathcal{C}$ et du cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon 1. On prendra $y_{\mathrm{I}}>0$.

$\mathcal{C}'$ a pour équation $x^2+y^2=1$.

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les solutions du système (I) $\begin{cases}x^2+y^2+4x=0\\x^2+y^2=1\end{cases}$.

Il s'agit d'un système non linéaire.

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases}1+4x=0\\x^2+y^2=1\end{cases}$ (la première équation est obtenue par soustraction membre à membre des deux équations)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\\dfrac{1}{16}+y^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\y^2=\dfrac{15}{16}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{4}\\y=\dfrac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{ou} \quad y=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\end{cases}$$

Conclusion : I a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ et J a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{4}\,;-\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$.