# Les intégrales de Bessel

Pour tout couple ($\alpha$ ; $\beta$) d'entiers naturels on pose : $I(\alpha,\beta)=\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta \,\mathrm{d}t$.

Le but est de déterminer une expression de $I(\alpha,\beta)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

On effectue une intégration par parties en choisissant deux fonctions $u$ et $v$ telles que $u'(t)=t^\alpha$ et $v(t)=(1-t)^\beta$.

On a alors $u(t)=\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et $v'(t)=-\beta(1-t)^{\beta-1}$.

On obtient :

$$
\begin{aligned}
I(\alpha,\beta) &= \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}(1-t)^\beta\right]_0^1+\int_0^1 \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\beta(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\,.\\
&= \int_0^1 \frac{\beta}{\alpha+1}t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\beta}{\alpha+1}\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)
\end{aligned}
$$

On a donc $I(\alpha,\beta)=\dfrac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)$.

Grâce à cette relation, on peut donner une expression de $I(\alpha,\beta)$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$.

$$
\begin{aligned}
I(\alpha,\beta) &= \frac{\beta}{\alpha+1}I(\alpha+1,\beta-1)\\
&= \frac{\beta(\beta-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}I(\alpha+2,\beta-2)\\
&\quad \ldots.\\
&= \frac{\beta(\beta-1)\times\ldots\times 1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\times\ldots\times(\alpha+\beta)}I(\alpha+\beta,0)
\end{aligned}
$$

$$I(\alpha+\beta,0)=\int_0^1 t^{\alpha+\beta}\ \mathrm{d}t=\left[\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+1}\right]_0^1=\frac{1}{\alpha+\beta+1}$$

On peut alors écrire la formule finale suivante :

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\beta!\times\alpha!}{(\alpha+\beta)!\times(\alpha+\beta+1)}$$

$$\boxed{I(\alpha,\beta)=\frac{\alpha!\times\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}}$$