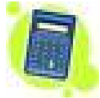
1ère S1

Contrôle du vendredi 10 avril 2015 (45 min)



Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans cet exercice, aucune réponse non justifiée ou mal justifiée ne sera prise en compte.

1°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.

Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

………

………

………

2°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2.

Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

………

………

………

3°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison – 2.

Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

………

………

………

II. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2 - (n-2)^2}{5}$.

Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

Préciser son premier terme et sa raison.

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{2n}}{5^{n+1}}$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

Préciser son premier terme et sa raison.

………

………

………

………

………

………

IV. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point + 2 points)

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1-3u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

On admet que pour tout entier naturel *n*, $u_n \neq 0$.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n=\dfrac{1}{u_n}$.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}$

=

=

=

=

2°) Recopier et compléter la phrase suivante sur la nature de la suite $\left(v_n\right)$ en donnant toutes les précisions utiles.

« D'après la question précédente, la suite $\left(v_n\right)$ est une suite … ».

……

……

3°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

……

……

……

……

……

……

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère l'algorithme ci-contre.
La variable *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
  S prend la valeur $S+2\times i$
FinPour

Sortie :
Afficher *S*

1°) Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n=4$ en entrée.
Donner la valeur de *S* affichée en sortie.

…………… (une seule réponse, sans égalité)

2°) Exprimer la « valeur » de la variable *S* affichée en sortie en fonction de la valeur de *n* saisie en entrée.

…………………………………… (une seule expression sans égalité)

VI. (4 points)

On considère une suite arithmétique $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$. On sait que $u_6=-3$ et que $u_{13}=-\dfrac{2}{3}$.

Calculer u_{18}.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 10-4-2015

I.

Dans cet exercice, aucune réponse non justifiée ou mal justifiée ne sera prise en compte.

On utilise la propriété du cours sur le sens de variation d'une suite géométrique.

1°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{3}$.

Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

On sait que $u_0 = 2$ donc $u_0 > 0$ et la raison q vaut $\frac{1}{3}$ donc $0 < q < 1$.

Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

2°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2.

Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

On sait que $u_0 = -3$ donc $u_0 < 0$ et la raison q vaut 2 donc $q > 1$.

Par conséquent, (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 0.

3°) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison – 2.

Étudier la monotonie de (u_n). Répondre par une phrase en donnant tous les éléments justificatifs.

La raison q vaut – 2 donc $q < 0$.

Par conséquent, (u_n) est non monotone.

II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2 - (n-2)^2}{5}$.

Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

Préciser son premier terme et sa raison.

On est obligé de faire un calcul littéral pour répondre à la question.

On ne peut effectuer le calcul des trois premiers termes et conclure par la comparaison des deux premières différences.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n^2 - n^2 + 4n - 4}{5}$$

$$= \frac{4n-4}{5}$$

$$= \frac{4}{5}n - \frac{4}{5}$$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -\frac{4}{5}$ et de raison $r = \frac{4}{5}$.

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^{2n}}{5^{n+1}}$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

Préciser son premier terme et la raison.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{\left(3^2\right)^n}{5^n} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \times \left(\frac{9}{5}\right)^n$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{5}$ et de raison $q = \frac{9}{5}$.

IV.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - 3u_n}$ pour tout entier naturel n.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{u_n}{1-3u_n}}$$

$$= \frac{1-3u_n}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_n} - 3$$

$$= v_n - 3$$

2°) Recopier et compléter la phrase suivante sur la nature de la suite (v_n) en donnant toutes les précisions utiles.

« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$ et de raison – 3.

3°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 1 - 3n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{1-3n}$.

V.

On considère l'algorithme ci-contre.
La variable *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Il n'est pas demandé de le programmer sur la calculatrice.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
S prend la valeur 0

Traitement :
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
    S prend la valeur $S + 2 \times i$
FinPour

Sortie :
Afficher *S*

1°) Faire tourner l'algorithme « à la main » pour $n = 4$ en entrée.
Donner la valeur de *S* affichée en sortie.

20 (une seule réponse, sans égalité)

2°) Exprimer la « valeur » de la variable *S* affichée en sortie en fonction de la valeur de *n* saisie en entrée.

$n(n+1)$ (une seule expression sans égalité)

L'algorithme a pour but de calculer la somme de tous les entiers naturels pairs de 0 à 2*n*.

$$0+2+4+...+2n = 2\times(0+1+...+n) = 2\times\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

On peut aussi se raccrocher au cours sur les suites arithmétiques : il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.

Explications plus détaillées :

1°)

Pour faire tourner « à la main » l'algorithme pour la valeur 3 de *n* saisie en entrée, le mieux (et le plus clair) est d'utiliser un tableau d'évolutions des variables *i* et *S*.

i		1	2	3	4
S	0	2	6	12	20

On observera que la variable *n* n'apparaît pas dans le tableau car son contenu, fixé dès l'entrée à 4, n'évolue pas au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme. Il s'agit donc d'un tableau d'évolution des variables *i* et *u*.

Le tableau d'évolution des variables peut aussi être fait en vertical.

i	*S*
	0
1	2
2	6
3	12
4	20

Si on fait apparaître la variable n, cela donne :

i	n	S
	4	0
1	4	2
2	4	6
3	4	12
4	4	20

2°)

• Pour comprendre, on peut faire tourner l'algorithme pour d'autres valeurs de n.
Par exemple, pour la valeur 5 de n saisie en entrée, on obtient :

i	S
	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30

• On doit ensuite passer au cas général :

La valeur finale de S est donné par la formule : $S = 2\times 1 + 2\times 2 + 3 .... + 2\times n$.

La valeur finale de S est donc égale à la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique du premier terme 2 et de la raison 2.
On peut aussi écrire : $S = 2\times(1+2+3+...+n)$.

Il y a une formule du cours qui donne une expression réduite de $1+2+3+...+n$ qui est $n\times\dfrac{n+1}{2}$ (somme des entiers de 1 à n).

VI.

On considère une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$. On sait que $u_6 = -3$ et que $u_{13} = -\dfrac{2}{3}$.

Calculer u_{18}.

Soit r la raison de la suite.

On a : $u_{13} = u_6 + (13-6)r$ (1).

(1) s'écrit $-\dfrac{2}{3} = -3 + 7r$ d'où $r = \dfrac{1}{3}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} u_{18} &= u_{13} + 5r \\ &= -\frac{2}{3} + 5\times\frac{1}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$