TS1

Contrôle du mardi 7 avril 2015 (50 minutes)

Prénom : …………………………………………….. **Nom :** ……………………. **Note : …. / 20**

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.

……

……

……

……

2°) Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$ (répondre par une seule phrase). On n'attend pas de calculs.

……

……

……

……

……

……

3°) On note α le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\mathrm{F}(\alpha)=0,5$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de α.

……………………………….. (un seul résultat, sans égalité)

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $I_n=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1°) Calculer la valeur exacte de I_1.

……

……

……

……

2°) Étudier le sens de variation de la suite (I_n).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $I_n \leqslant 0,1$.

…………………… (une seule réponse sans faire de phrase)

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A le point de P d'affixe 2i et M un point de P d'affixe $z \neq 2\text{i}$.
On pose $Z = \dfrac{z}{z - 2\text{i}}$.

1°) On suppose que z est différent de 0 et de 2i.

Compléter l'égalité suivante à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

$\arg Z =$ .... $[2\pi]$

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe $z \neq 2\text{i}$ tels que Z soit imaginaire pur non nul.
Faire un graphique en prenant 2 cm pour unité de longueur et représenter l'ensemble E avec soin et précision.

....

....

....

....

....

....

....

....

IV. (4 points : 2 points pour la recherche + 2 points pour la conclusion)

Soit A et B deux points distincts de l'espace E.
Déterminer l'ensemble F des points M de E tels que l'on ait $\overrightarrow{\text{AM}} \bullet \overrightarrow{\text{AB}} = \text{AB}^2$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

V. (2 points)

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace d'arête a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AG}} \bullet \overrightarrow{\text{BH}}$.

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 7-4-2015

I.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $\text{F}(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,\text{d}t$ (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

1°) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\text{F}'(x)$.

Considérons la fonction $u : t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+t^2}$.

La fonction u est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{F}(x)=\displaystyle\int_0^x u(t)\,\text{d}t$

D'après le théorème du cours (expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale, F est la primitive de u qui s'annule en 0), F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{F}'(x)=u(x)$ soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{F}'(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$.

2°) Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$ (répondre par une seule phrase). On n'attend pas de calculs.

On travaille avec des inégalités larges car dans le cours, les propriétés d'ordre pour les intégrales sont données avec des inégalités larges.

D'après le résultat de la question précédente :
$\text{F}' \geqslant 0$ sur tout intervalle de la forme $\left[2k\pi\,;(2k+1)\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
$\text{F}' \leqslant 0$ sur tout intervalle de la forme $\left[(2k-1)\pi\,;2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que :
- F est croissante sur les intervalles de la forme $\left[2k\pi\,;(2k+1)\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- F est décroissante sur les intervalles de la forme $\left[(2k-1)\pi\,;2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

En préalable à cette question, j'aurais pu également demander de résoudre l'équation $\text{F}'(x)=0$.

3°) On note α le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\text{F}(\alpha)=0{,}5$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur décimale approchée d'ordre 3 par défaut de α.

1,480 (un seul résultat, sans égalité)

On rentre la fonction F dans la calculatrice.
On tape : $\text{fnInt}\left(\sin(\text{A})/\left(1+\text{A}^2\right),\text{A},0,\text{X}\right)$.
Attention : ne pas oublier de mettre la calculatrice en mode radian.

Avec la calculatrice, on trace la courbe représentative de la fonction F ainsi que la droite d'équation $y=0{,}5$.
On utilise la commande spéciale permettant de déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux courbes.
On obtient l'affichage suivant pour l'abscisse du point d'intersection : 1,4809145.

Il n'y aucun moyen de déterminer α par le calcul.
On ne peut pas connaître la valeur exacte de α.

II.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $I_n=\displaystyle\int_1^{\text{e}} (\ln x)^n\,\text{d}x$.

On ne peut déterminer une expression de I_n en fonction de n.

1°) Calculer la valeur exacte de I_1.

Une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $t \mapsto t\ln t - t$.

$$I_1=\int_1^{\text{e}} \ln x\,\text{d}x$$

$$=\left[x\ln x - x\right]_1^{\text{e}}$$

$$=\text{e}\ln\text{e}-\text{e}-1\times\ln 1+1$$

$$=\text{e}-\text{e}-0+1$$

$$=1$$

2°) Étudier le sens de variation de la suite (I_n).

On utilise la méthode par différence (seule méthode possible).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} - I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1} \, \mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left[(\ln x)^{n+1} - (\ln x)^n \right] \mathrm{d}x \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n (\ln x - 1) \, \mathrm{d}x$$

Or $\forall x \in [1 ; \mathrm{e}] \quad (\ln x)^n \geqslant 0$ et $\ln x - 1 \leqslant 0$

D'où $\forall x \in [1 ; \mathrm{e}] \quad (\ln x)^n (\ln x - 1) \leqslant 0$.

Variante possible :

On sait que $\forall x \in [1 ; \mathrm{e}] \quad 0 \leqslant \ln x \leqslant 1$ donc $\forall x \in [1 ; \mathrm{e}] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$.

Par croissance de l'intégrale, on a donc : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^{n+1} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} \leqslant I_n$.

On en déduit que la suite (I_n) est décroissante.

On travaille avec des inégalités larges car dans le cours, les propriétés d'ordre pour les intégrales sont données avec des inégalités larges.

3°) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $I_n \leqslant 0,1$.

26 (une seule réponse sans faire de phrase)

On rentre la suite dans la calculatrice. Il faut donner un nom bien choisi à la variable d'intégration, par exemple A, pour que la calculatrice « accepte » de faire le calcul.
On peut aussi rentrer la fonction associée à la suite.
On obtient le résultat au bout d'un certain temps : la calculatrice a du mal à effectuer les calculs (elle rame pas mal) !
Avec la calculatrice, on trouve $I_{26} \approx 0,0972$.

Il n'y aucun moyen de déterminer la valeur de n par le calcul.

III.

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point de P d'affixe 2i et M un point de P d'affixe $z \neq 2\mathrm{i}$.

On pose $Z = \dfrac{z}{z - 2\mathrm{i}}$.

1°) On suppose que z est différent de 0 et de 2i.

Compléter l'égalité suivante à l'aide d'un angle orienté de vecteurs.

$$\arg Z = \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}} ; \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \quad [2\pi]$$

$$\arg Z = \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} ; \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right) \quad [2\pi]$$

En effet, $Z = \dfrac{z - 0}{z - 2\mathrm{i}} = \dfrac{z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}}}$.

2°) Déterminer l'ensemble E des points M de P d'affixe $z \neq 2\mathrm{i}$ tels que Z soit imaginaire pur non nul.
Faire un graphique en prenant 2 cm pour unité de longueur et représenter l'ensemble E avec soin et précision.

Soit M un point quelconque de P d'affixe $z \neq 2\mathrm{i}$ (c'est-à-dire $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$).

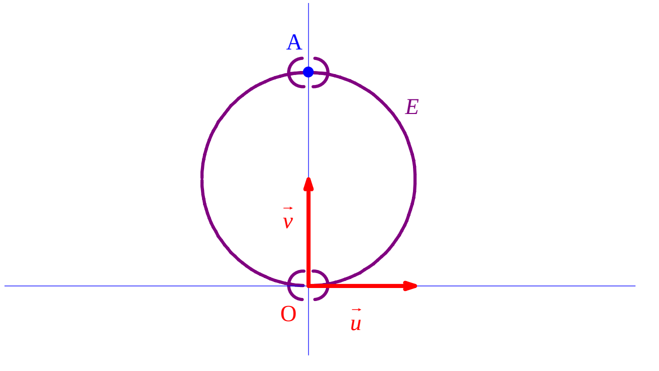
$$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow Z \neq 0 \text{ et } Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z \neq 0 \text{ et } \arg Z = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad \text{(le modulo } \pi \text{ est extrêmement important)}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{M} \neq \mathrm{O} \text{ et } \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} ; \overrightarrow{\mathrm{MO}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

E est le cercle de diamètre $[\mathrm{OA}]$ privé de O et de A.

Le plan est orienté.



IV.

Soit A et B deux points distincts de l'espace *E*.
Déterminer l'ensemble *F* des points M de *E* tels que l'on ait $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$.

$F = \left\{ M \in E \,/\, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 \right\}$

Soit M un point quelconque de *E*.

$$\begin{aligned}
M \in F &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0
\end{aligned}$$

F est le plan orthogonal à (AB) passant par B.

On parle de plan « orthogonal » à une droite et non de « plan perpendiculaire » à une droite.

- On ne peut pas utiliser le projeté orthogonal de M sur la droite (AB).
- On ne peut pas non plus utiliser l'expression trigonométrique $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \times AB \times \cos \widehat{MAB}$.

V.

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace d'arête a $\left(a \in \mathbb{R}_+^* \right)$.

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}$.

Aucune autre méthode que la décomposition n'est possible.
Il n'est pas possible d'utiliser la méthode de projection orthogonale.

Cet exercice a été complètement raté.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \right) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BA}}_{0} + \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AH} \quad \text{(vecteurs orthogonaux)} \\
&= -a^2 + \left(a\sqrt{2} \right)^2 \quad \left(\text{on a } BG = AH = a\sqrt{2} \text{ par la formule de la diagonale d'un carré : côté } \times\sqrt{2}\right) \\
&= -a^2 + 2a^2 \\
&= a^2
\end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} &= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} \right) \cdot \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} \right) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DH}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BD}}_{0} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{DH} \quad \text{(vecteurs orthogonaux)} \\
&= \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{DH} \\
&= \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CG} \\
&= a^2
\end{aligned}$$

Quelles sont les deux conditions pour pouvoir effectuer un projeté orthogonal ?

1$^{\text{ère}}$ condition : Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, on ne peut projeter que sur la droite (AB) ou sur la droite (AC) et sur aucune autre droite.

2$^{\text{e}}$ condition : On ne projette qu'un seul des deux vecteurs.

Autre méthode :

Utiliser un repère orthonormé. On peut prendre pour origine A.