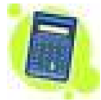
$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du vendredi 3 avril 2015 (30 min)



Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (8 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points)

On veut creuser un puits dont la profondeur est un nombre entier de mètres.
Le 1$^{\text{er}}$ mètre coûte 90 €, le 2$^{\text{e}}$ mètre 110 €, le 3$^{\text{e}}$ mètre 130 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le prix en euros du n-ième mètre.

Ainsi, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ et le premier terme de la suite est $u_1 = 90$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) (faire une seule phrase ; donner toutes les précisions utiles).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………………… (une seule égalité)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Exprimer u_n en fonction de n où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………

(une seule égalité, sous forme simplifiée ; la lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite)

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………………………

(une seule égalité, sous forme simplifiée ; la lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite)

4°) Calculer le coût total d'un puits de 42 mètres.

……………………………………… (une seule réponse, sans égalité)

5°) On dispose d'un budget de 34 650 €.
Déterminer la profondeur maximale de puits que l'on peut creuser.
Résoudre la question par le calcul. Détailler la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (7 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point + 2 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel *n*.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n + 1$.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + 1$

$=$

$=$

$=$

$=$

2°) Recopier et complétant la phrase donnant la nature de la suite (v_n) en donnant toutes les précisions utiles.

« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

……

……

3°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

……

……

……

……

……

……

……

III. (5 points)

Dans le plan *P*, on considère un carré ABCD de côté *a* ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et de centre O.
On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].
Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait $\left(\overline{\text{MA}} + \overline{\text{MB}}\right) \bullet \left(\overline{\text{MC}} + \overline{\text{MD}}\right) = 7a^2$.

Modèle de rédaction à respecter impérativement :

- On commencera la recherche de l'ensemble par la phrase « Soit M un point quelconque de *P*. »
- On rédigera la recherche de la manière suivante sous la forme d'une « chaîne » d'équivalences :

« $\text{M} \in E \Leftrightarrow$ ……….

$\Leftrightarrow$ ………

- On conclura ainsi : « L'ensemble *E* est ………………… » (aucune figure n'est demandée).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 3-4-2015

I.

On veut creuser un puits dont la profondeur est un nombre entier de mètres.
Le 1[er] mètre coûte 90 €, le 2[e] mètre 110 €, le 3[e] mètre 130 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note u_n le prix en euros du n-ième mètre.

Ainsi, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ et le premier terme de la suite est $u_1 = 90$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n) (faire une seule phrase ; donner toutes les précisions utiles).

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = u_n + 20 \quad \text{(une seule égalité)}$$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 90$ et de raison $r = 20$.

2°) Exprimer u_n en fonction de n où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 70 + 20n$$

(une seule égalité, sous forme simplifiée ; la lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite)

On utilise la formule $u_n = u_1 + (n-1) \times r$ qui découle de la formule plus générale $u_n = u_p + (n-p) \times r$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 90 + (n-1) \times 20$$

$$= 90 + 20n - 20$$

$$= 70 + 20n$$

• Pour la question « Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n », il n'y a pas de calcul à faire.
On traduit l'énoncé : $u_{n+1} = u_n + 20$.

• Pour la question « Exprimer u_n en fonction de n », on doit faire un « mini-calcul » en appliquant la formule.
On obtient l'égalité : $u_n = 20n + 70$.

En résumé, on retiendra :

- u_{n+1} en fonction de u_n $\longrightarrow$ pas de calcul
- u_n en fonction de n $\longrightarrow$ « calcul », application de formule

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 80n + 10n^2$$

(une seule égalité, sous forme simplifiée ; la lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite)

4°) Calculer le coût total d'un puits de 42 mètres.

21 000 € (une seule réponse, sans égalité)

On calcule S_{42}.

5°) On dispose d'un budget de 34 650 €.
Déterminer la profondeur maximale de puits que l'on peut creuser.
Résoudre la question par le calcul. Détailler la démarche.

On cherche le plus grand entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $S_n \leqslant 34\,650$ (1).

(1) $\Leftrightarrow 80n + 10n^2 \leqslant 34650$

$\Leftrightarrow 8n + n^2 \leqslant 3465$ (on divise les deux membres de l'inégalité par 10 qui est strictement positif)

$\Leftrightarrow n^2 + 8n - 3465 \leqslant 0$

Considérons le polynôme $x^2 + 8x - 3465$.
Ses racines sont 55 et – 63.

Le polynôme $x^2 + 8x - 3465$ est négatif ou nul si et seulement si $x \in [-63 ; 55]$.

L'entier naturel n cherché est donc 55.

Avec un budget de 34 650 €, on peut donc creuser un puits d'une profondeur maximale de 55 mètres.

II.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 2$ pour tout entier naturel n.
Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 1$.

1°) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} + 1 \\ &= 3u_n + 2 + 1 \\ &= 3u_n + 3 \\ &= 3(u_n + 1) \\ &= 3v_n\end{aligned}$$

On n'utilise pas la valeur de u_0 dans cette question.

2°) Recopier et complétant la phrase donnant la nature de la suite (v_n) en donnant toutes les précisions utiles.
« D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 6$ et de raison $q = 3$.

Comme la relation $v_n = u_n + 1$ est valable quel que soit l'entier naturel n, elle l'est en particulier pour l'entier naturel $n = 0$. On peut donc écrire $v_0 = u_0 + 1 = 5 + 1 = 6$.

3°) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 6 \times 3^n$

Or $v_n = u_n + 1$ donc $u_n = v_n - 1$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 6 \times 3^n - 1$

III.

Dans le plan P, on considère un carré ABCD de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) et de centre O.
On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].
Déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait $\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}}\right) = 7a^2$.

Modèle de rédaction à respecter impérativement :

- On commencera la recherche de l'ensemble par la phrase « Soit M un point quelconque de P. »
- On rédigera la recherche de la manière suivante sous la forme d'une « chaîne » d'équivalences :

« M $\in E$ $\Leftrightarrow$ ……….
$\Leftrightarrow$ ………

- On conclura ainsi : « L'ensemble E est ………………… » (aucune figure n'est demandée).

Soit M un point quelconque de P.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MD}}\right) = 7a^2$

$\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{\mathrm{MJ}}\right) = 7a^2$ (car I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD], voir encadré ci-dessous)

$\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MJ}}\right) = 7a^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MJ}} = \dfrac{7a^2}{4}$

$\Leftrightarrow \mathrm{MO}^2 - \dfrac{\mathrm{IJ}^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$ (d'après une formule de la médiane car O est le milieu de [IJ])

$\Leftrightarrow \mathrm{MO}^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$

$\Leftrightarrow \mathrm{MO}^2 = \dfrac{7a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow \mathrm{MO}^2 = 2a^2$

$\Leftrightarrow \mathrm{OM} = a\sqrt{2}$

L'ensemble E est le cercle de centre O et de rayon $a\sqrt{2}$.

Comme I est le milieu de [AB], $\forall M \in \mathcal{P} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Comme J est le milieu de [CD], $\forall M \in \mathcal{P} \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MJ}$.