$1^{\text{ère}}$ S1

Test du mardi 31 mars 2015 (20 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (8 points)

1°) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et par la relation de récurrence $2u_n = -3u_{n+1}$ pour tout entier naturel *n*.

• Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………………….. (une seule égalité)

• Définir par une phrase comment on obtient chaque terme de la suite (u_n), sauf le premier, à partir du précédent.

Chaque terme de la suite (u_n), sauf le premier, s'obtient en ……………………………………………………….…….

……..

• La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

……..

……..

• Exprimer u_n en fonction de *n*.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………………….. (une seule égalité)

2°) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0 = 1$ et par la relation de récurrence $v_n = v_{n+1} - 3$ pour tout entier naturel *n*.

• Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………………….. (une seule égalité)

• Définir par une phrase comment on obtient chaque terme de la suite (v_n), sauf le premier, à partir du précédent.

Chaque terme de la suite (v_n), sauf le premier, s'obtient en ……………………………………………………….…….

……..

• La suite (v_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

……..

……..

• Exprimer v_n en fonction de *n*.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………………….. (une seule égalité)

II. (6 points : 3 points + 3 points)

1°) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison – 4.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ (on peut écrire $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$).

• Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

…………………………. (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$S_n =$ ....

2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 4$ et de raison 5.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ (on peut écrire $S'_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k$).

• Combien la somme S'_n comporte-t-elle de termes ?

…………………………. (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S'_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$S'_n =$ ....

III. (6 points : 1°) 2 points 2°) 2 points 3°) 2 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 3 \times 4^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = -9 \times 4^n$.
On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).
La première étape est donnée et l'on rappelle que $4^{n+1} = 4 \times 4^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = \left(5 - 3 \times 4^{n+1}\right) - \left(5 - 3 \times 4^n\right)$

= ....

= ....

= ....

= ....

2°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque.
Après une courte étude, on conclura par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$.

………

………

………

………

………

3°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement croissante / décroissante (à partir de l'indice 0) ».

………

………

Corrigé du test du 31-3-2015

I.

1°) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=5$ et par la relation de récurrence $2u_n=-3u_{n+1}$ pour tout entier naturel *n*.

• Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_{n+1}=-\frac{2}{3}u_n \quad \text{(une seule égalité)}$$

• Définir par une phrase comment on obtient chaque terme de la suite (u_n), sauf le premier, à partir du précédent.

Chaque terme de la suite (u_n), sauf le premier, s'obtient en multipliant le précédent par $-\frac{2}{3}$.

• La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

(u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=5$ et de raison $q=-\frac{2}{3}$.

• Exprimer u_n en fonction de *n*.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad u_n=5\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{(une seule égalité)}$$

2°) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0=1$ et par la relation de récurrence $v_n=v_{n+1}-3$ pour tout entier naturel *n*.

• Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad v_{n+1}=v_n+3 \quad \text{(une seule égalité)}$$

• Définir par une phrase comment on obtient chaque terme de la suite (v_n), sauf le premier, à partir du précédent.

Chaque terme de la suite (v_n), sauf le premier, s'obtient en ajoutant 3 au terme précédent.

• La suite (v_n) est-elle arithmétique ou géométrique ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

(v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0=1$ et de raison $r=3$.

• Exprimer v_n en fonction de *n*.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad v_n=1+3n \quad \text{(une seule égalité)}$$

II.

1°) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=2$ et de raison -4.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ (on peut écrire $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$).

• Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

$n+1$ (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$$S_n=(n+1)(2-2n)$$

On peut aussi donner cette réponse : $S_n=2\left(1-n^2\right)$.

2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0=4$ et de raison 5.

Pour tout entier naturel *n*, on pose $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$ (on peut écrire $S'_n=\sum_{k=0}^{k=n}v_k$).

• Combien la somme S'_n comporte-t-elle de termes ?

$n+1$ (une seule réponse, sans faire de phrase)

● Donner une expression simplifiée S'_n en fonction de *n* (*n* étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$$S'_n = 5^{n+1} - 1$$

III.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 3 \times 4^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = -9 \times 4^n$.
On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).
La première étape est donnée et l'on rappelle que $4^{n+1} = 4 \times 4^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = \left(5 - 3 \times 4^{n+1}\right) - \left(5 - 3 \times 4^n\right)$

$= 5 - 3 \times 4^{n+1} - 5 + 3 \times 4^n$

$= -3 \times 4^n \times 4 + 3 \times 4^n$

$= (-12 + 3) \times 4^n$

$= -9 \times 4^n$

2°) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où *n* est un entier naturel quelconque.
Après une courte étude, on conclura par une inégalité quantifiée du type : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$.

On a : $-9 < 0$ et $4^n > 0$.
Donc $-9 \times 4^n < 0$

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$.

3°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
On rédigera une phrase du type « D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement croissante / décroissante (à partir de l'indice 0) ».

D'après le résultat de la question 2°), la suite (u_n) est strictement décroissante (à partir de l'indice 0).