1$^{\text{ère}}$ S1

Test du lundi 30 mars 2015 (30 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (6 points)

Soit EFG un triangle tel que $\mathrm{EF}=8\text{ cm}$, $\mathrm{EG}=5\text{ cm}$ et $\widehat{\mathrm{FEG}}=135°$.
Le tracé de la figure n'est pas demandé.

1°) Calculer FG (valeur exacte).

………

………

………

2°) Calculer l'aire S du triangle EFG en cm^2 (valeur exacte).

………

………

………

II. (3 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de [BC].
On pose $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{CA}$, $c=\mathrm{AB}$.
Exprimer AI en fonction de a, b, c.

………

………

………

………

III. (4 points : 2 points + 2 points)

1°) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=6$ et de raison – 2.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ (on peut écrire $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$).

• Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

…………………………. (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S_n en fonction de n (n étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre n.

$S_n=$ ……………………………………………

2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0=3$ et de raison 4.

Pour tout entier naturel n, on pose $S'_n=v_0+v_1+...+v_n$ (on peut écrire $S'_n=\sum_{k=0}^{k=n}v_k$).

• Combien la somme S'_n comporte-t-elle de termes ?

…………………………. (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S'_n en fonction de n (n étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre n.

$S'_n=$ ……………………………………………

IV. (2 points : 1 point + 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence $2u_{n-1} = -3u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier et répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

……..

……..

2°) Exprimer u_n en fonction de *n*.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………………….. (une seule égalité)

V. (5 points : 3 points + 2 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 3 \times 4^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = -9 \times 4^n$.
On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

$=$ ....

2°) En déduire, en justifiant, le sens de variation de la suite (u_n).

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

……..

Corrigé du test du 30-3-2015

I. (6 points)

Soit EFG un triangle tel que $\text{EF}=8\text{ cm}$, $\text{EG}=5\text{ cm}$ et $\widehat{\text{FEG}}=135°$.
Le tracé de la figure n'est pas demandé.

1°) Calculer FG (valeur exacte).

D'après la formule du côté dans le triangle EFG,

$$\text{FG}^2=\text{EF}^2+\text{EG}^2-2\times\text{EF}\times\text{EG}\times\cos\widehat{\text{FEG}}$$

$$=64+25-2\times8\times5\times\cos135°$$

$$=89-2\times8\times5\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (\cos135° \text{ est une valeur remarquable ; } \cos135°=-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=89+40\sqrt{2}$$

Par suite, $\text{FG}=\sqrt{89+40\sqrt{2}}$ cm.

2°) Calculer l'aire S du triangle EFG en cm^2 (valeur exacte).

$$S=\frac{1}{2}\times\text{EF}\times\text{EG}\times\sin\widehat{\text{FEG}}$$

$$=\frac{1}{2}\times8\times5\times\sin135°$$

$$=\frac{1}{2}\times8\times5\times\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\sin135° \text{ est une valeur remarquable ; } \sin135°=\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=10\sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

II. (3 points)

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de [BC].
On pose $a=\text{BC}$, $b=\text{CA}$, $c=\text{AB}$.
Exprimer AI en fonction de a, b, c.

D'après la formule de la médiane dans le triangle ABC, on a :

$$\text{AB}^2+\text{AC}^2=2\text{AI}^2+\frac{\text{BC}^2}{2} \quad (1).$$

Donc $2\text{AI}^2=b^2+c^2-\dfrac{a^2}{2}$.

On obtient alors $\text{AI}^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

On en déduit que $\text{AI}=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.

On ne peut pas aller plus loin.

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Le nombre de termes d'une somme de termes consécutifs d'une suite est égal au dernier indice $-$ premier indice $+1$.

1°) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=6$ et de raison -2.

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ (on peut écrire $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$).

• Combien la somme S_n comporte-t-elle de termes ?

$n+1$ (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S_n en fonction de n (n étant un entier naturel fixé).
Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre n.

$$S_n=(n+1)(6-n)$$

2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0=3$ et de raison 4.

Pour tout entier naturel n, on pose $S'_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ (on peut écrire $S'_n=\sum_{k=0}^{k=n}v_k$).

• Combien la somme S'_n comporte-t-elle de termes ?

$n+1$ (une seule réponse, sans faire de phrase)

• Donner une expression simplifiée S'_n en fonction de n (n étant un entier naturel fixé).

Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$$S'_n = 4^{n+1} - 1$$

IV. (2 points : 1 point + 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation de récurrence $2u_{n-1} = -3u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier et répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

La relation de récurrence s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = -\frac{2}{3} \times u_{n-1}$.

Cette relation exprime que chaque terme de la suite, sauf le premier, est égal au précédent multiplié par $-\frac{2}{3}$.

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = -\frac{2}{3}$.

2°) Exprimer u_n en fonction de *n*.
La seule lettre figurant dans le membre de droite doit être la lettre *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{(une seule égalité)}$$

V. (5 points : 3 points + 2 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - 3 \times 4^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = -9 \times 4^n$.
On effectuera le calcul littéral en 5 étapes selon le modèle ci-dessous (à compléter).

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} - u_n = \left(5 - 3 \times 4^{n+1}\right) - \left(5 - 3 \times 4^n\right)$$

$$= 5 - 3 \times 4^{n+1} - 5 + 3 \times 4^n$$

$$= -3 \times 4 \times 4^n + 3 \times 4^n$$

$$= (-12 + 3) \times 4^n \qquad \text{(on factorise)}$$

$$= -9 \times 4^n$$

2°) En déduire, en justifiant, le sens de variation de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 4^n > 0$ et $-9 < 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$ (la quantification « $\forall n \in \mathbb{N}$ » est très importante pour pouvoir conclure).

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante (à partir de l'indice 0).