Ne rien écrire sur cette feuille.

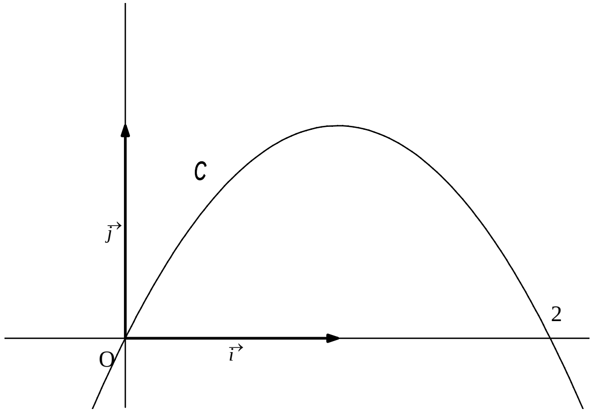
Prendre une copie pour faire les exercices.

Reproduire les graphiques (en respectant les unités graphiques indiquées).

Exercices de calculs d'aires

I. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

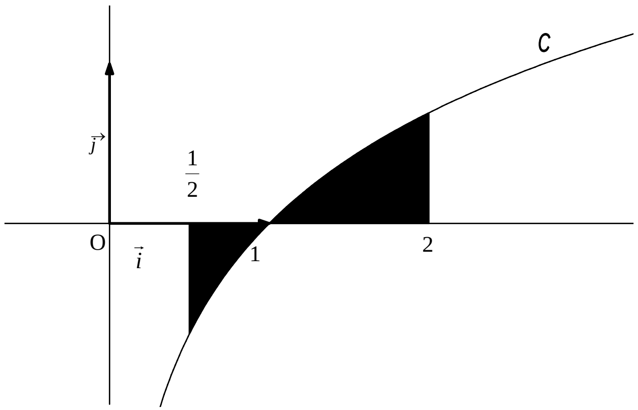
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Hachurer le domaine sur la figure ci-dessous.



II. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

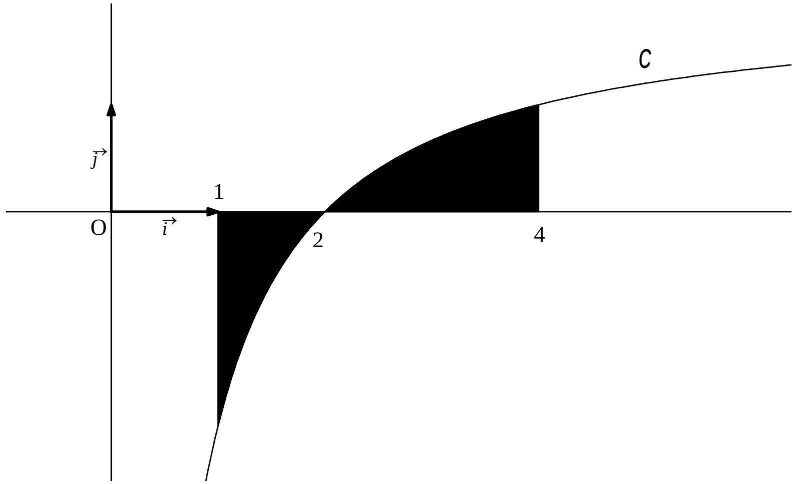
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unité d'aire) de la partie hachurée.

On rappelle que la fonction $\varphi : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction f.



III. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-4}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

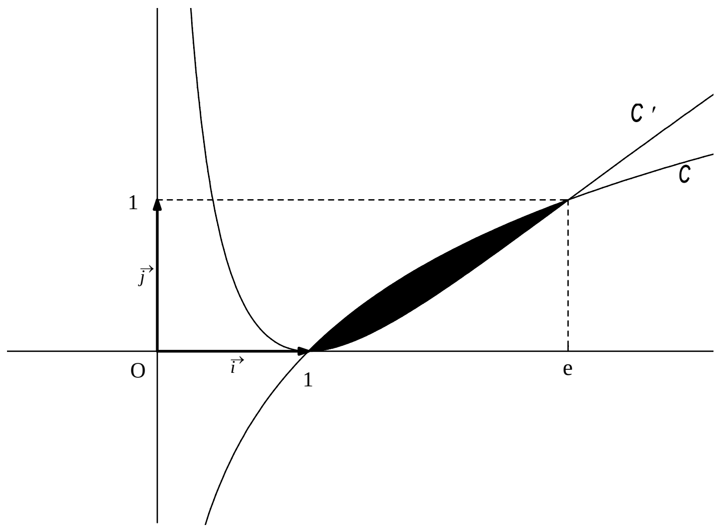
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unité d'aire) de la partie hachurée.



IV. On donne ci-dessous les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectives des fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto (\ln x)^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer la dérivée de la fonction $\varphi : x \mapsto x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 3x$.

2°) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unité d'aire) de la partie hachurée.



Corrigé

I. $f : x \mapsto 2x - x^2$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

f est continue et positive ou nulle sur l'intervalle $[0\,;2]$ donc l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 4 - \frac{8}{3} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3} \text{ u.a.}$$

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

N.B. : Le domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est défini par le système d'inéquations
$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant 2x - x^2 \end{cases}$.

II. $f : x \mapsto \ln x$

Le domaine considéré est la réunion de deux domaines : le domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; le domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1\,;2]$.

L'aire du domaine hachuré est la somme des aires de ces deux domaines.

f est continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$; f est négative ou nulle sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;2]$ donc l'aire du domaine hachuré est donnée par :

$$\mathcal{A} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \text{ avec } \mathrm{I}_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\ \mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{I}_2 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Pour le calcul de I_1 et de I_2, on utilise le fait qu'une primitive de la fonction ln sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ est la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x$ (résultat qui n'est pas exigible mais qu'il est conseillé de savoir).
Sinon, on peut utiliser une IPP pour chacune des deux intégrales.

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\ \mathrm{d}x \\ &= \left[x\ln x - x\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(1\times\underbrace{\ln 1}_{0} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -1 - \left[\frac{1}{2}(-\ln 2) - \frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\ln 2 - 1}{2}\end{aligned}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \ln x\ \mathrm{d}x = \left[x\ln x - x\right]_1^2 = 2\ln 2 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\frac{\ln 2 - 1}{2} + 2\ln 2 - 1 \\ &= \frac{-\ln 2 + 4\ln 2 - 1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{3\ln 2 - 1}{2} \text{ u.a.}}$$

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

* On peut aussi écrire :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right] \quad f(x) \leqslant 0$$
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}\,;2\right] \quad f(x) \geqslant 0$$

III. $f : x \mapsto \dfrac{2x-4}{x}$

f est continue sur l'intervalle [1 ; 4] ; f est négative ou nulle sur l'intervalle [1 ; 2] et positive ou nulle sur l'intervalle [2 ; 4] donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré est donnée par la formule :

$\mathcal{A} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$ avec $\mathrm{I}_1 = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

On calcule séparément $-\mathrm{I}_1$ et I_2.

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2x-4}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(2-\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[2x-4\ln x\right]_1^2 = 4-4\ln 2-2 = 2-4\ln 2$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{2x-4}{x}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 \left(2-\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[2x-4\ln x\right]_2^4 = 8-8\ln 2-4+4\ln 2 = 4-4\ln 2$$

(on utilise $\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$)

$\mathcal{A} = -(2-4\ln 2)+4-4\ln 2$

$$\boxed{\mathcal{A} = 2 \text{ u.a.}}$$

On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

IV. $f : x \mapsto \ln x$ $\qquad g : x \mapsto (\ln x)^2$

1°) Calculons la dérivée de la fonction $\varphi : x \mapsto x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 3x$.

On applique la formule de dérivation d'un produit ainsi que la formule de dérivée $\left(u^2\right)' = 2uu'$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'(x) = 1\times(\ln x)^2 + \cancel{x}\times 2\times\frac{1}{\cancel{x}}\times\ln x - 3\left(1\times\ln x + \cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}\right)+3$$

$$= (\ln x)^2 + 2\ln x - 3\ln x - 3 + 3$$

$$= (\ln x)^2 - \ln x$$

2°) Calcul de l'aire hachurée.

Sur l'intervalle [1 ; e], la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}'$ (on peut l'affirmer grâce au graphique ou le démontrer algébriquement) donc l'aire hachurée est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_1^{\mathrm{e}} \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^{\mathrm{e}} \left[\ln x - (\ln x)^2\right]\mathrm{d}x$$

$= \int_1^{\mathrm{e}} \left[-\varphi'(x)\right]\mathrm{d}x$ (utilisation de la question 1°) ; attention au signe, on reconnaît l'opposé de la dérivée de φ)

$$= \left[-x(\ln x)^2 + 3x\ln x - 3x\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$= -\mathrm{e}(\ln \mathrm{e})^2 + 3\mathrm{e}\ln \mathrm{e} - 3\mathrm{e} + 3$$

$$= -\mathrm{e} - 3\mathrm{e} + 3\mathrm{e} + 3$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 3 - \mathrm{e} \text{ u.a.}}$$

On vérifie que le résultat est bien positif car $\mathrm{e} < 3$.
On vérifie ce résultat avec la calculatrice.

N.B. : La partie hachurée est définie par le système d'inéquations $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \\ (\ln x)^2 \leqslant y \leqslant \ln x \end{cases}$.

Les calculs en colonnes sont préférables partout.