1ère S1

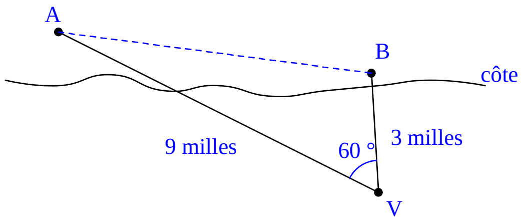
Contrôle du vendredi 27 mars 2015 (30 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (2 points)

Un voilier V approche de la côte. Il est situé à 9 milles du phare A, à 3 milles du phare B et l'angle $\widehat{AVB}$ mesure 60 °.
Calculer la distance L en milles entre les deux phares (valeur exacte puis valeur arrondie à l'unité).



……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (2 points)

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 8$ cm et $BC = 5$ cm. On note I le milieu de [AC].
Calculer BI (valeur exacte).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

Soit EFG un triangle tel que $EF = 7$ cm, $EG = 4$ cm et $\widehat{FEG} = 135°$.
Le tracé de la figure n'est pas demandé.
Calculer l'aire S du triangle EFG en cm^2 (valeur exacte).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (4 points : 2 points + 2 points)

1°) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 2.
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n. Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.

$S_n =$ ……………………………………………

2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison 4.
Pour tout entier naturel n, on pose $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.
Exprimer S_n' en fonction de n. Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

$S_n' =$ ……………………………………………

V. (4 points : 2 points + 2 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence $u_{n-1} = -2u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

………..

………..

2°) Exprimer u_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}$ …………………………….. (une seule égalité)

VI. (4 points : 2 points + 2 points)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - 2 \times 3^n$ pour tout entier naturel n.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -4 \times 3^n$.

………..

………..

………..

2°) En déduire, en justifiant, le sens de variation de la suite (u_n).

………..

………..

………..

………..

………..

………..

VII. (2 points)

En 2015, une forêt possède 80 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 5 000 arbres.
Déterminer la première année durant laquelle la forêt comptera plus de 90 000 arbres.
Expliquer la démarche mise en œuvre pour répondre à la question.

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

………..

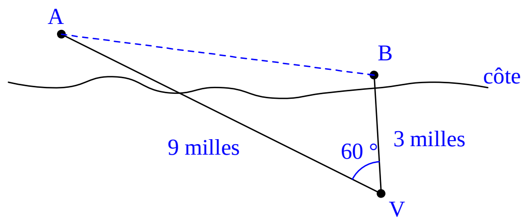
………..

………..

Corrigé du contrôle du 27-3-2015

I.

Un voilier V approche de la côte. Il est situé à 9 milles du phare A, à 3 milles du phare B et l'angle $\widehat{AVB}$ mesure 60 °.
Calculer la distance L en milles entre les deux phares (valeur exacte puis valeur arrondie à l'unité).



D'après la formule du côté dans le triangle ABV,

$$AB^2 = AV^2 + BV^2 - 2\,AV \times BV \times \cos \widehat{AVB}$$

$$= 9^2 + 3^2 - 2 \times 9 \times 3 \times \cos 60°$$

$$= 63$$

Par suite, $AB = \sqrt{63}$ milles.

Avec la calculatrice, on obtient : $AB \approx 8$ milles (valeur arrondie à l'unité).

La distance séparant les deux phares est d'environ 8 milles.

II.

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 8$ cm et $BC = 5$ cm. On note I le milieu de [AC].
Calculer BI (valeur exacte).

D'après la formule de la médiane dans le triangle ABC, on a : $AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \dfrac{AC^2}{2}$ (1).

(1) donne : $2BI^2 = 57$.

Par suite $BI = \sqrt{\dfrac{57}{2}}$ cm.

Il est inutile de mettre BI sous la forme : $\dfrac{\sqrt{114}}{2}$.

III.

Soit EFG un triangle tel que $EF = 7$ cm, $EG = 4$ cm et $\widehat{FEG} = 135°$.
Le tracé de la figure n'est pas demandé.
Calculer l'aire S du triangle EFG en cm^2 (valeur exacte).

$$S = \frac{1}{2} \times EF \times EG \times \sin \widehat{FEG}$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \sin 135°$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (\sin 135° \text{ est une valeur remarquable ; } \sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$= 7\sqrt{2}\ \text{cm}^2$$

IV.

Il s'agit d'un exercice de calcul d'expressions simplifiées de sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.

Cet exercice a été complètement raté !
Les formules de sommes de termes consécutifs des suites arithmétiques et géométriques doivent être sues par cœur. On peut rentrer les formules dans la calculatrice.

Chaque somme va de l'indice 0 à l'indice n : elles ont donc chacune $n+1$ termes.

Le nombre de termes d'une somme de termes consécutifs d'une suite est égal au dernier indice − premier indice + 1.

1°) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -5$ et de raison 2.
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n. Donner le résultat sous forme factorisée la plus simple possible.

$$S_n = (n+1)(n-5)$$

$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$u_0 = -5$
$u_n = -5 + 2n$

$$S_n = (n+1) \times \frac{-5 + 2n - 5}{2}$$

$$= (n+1) \times \frac{2n - 10}{2}$$

$$= (n+1)(n-5)$$

2°) Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison 4.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $S'_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.
Exprimer S_n' en fonction de *n*. Donner le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$S'_n = \frac{5}{3}\left(4^{n+1} - 1\right)$$

Dans la colonne de gauche, on applique la formule $S'_n = v_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

Dans la colonne de droite, on applique la formule $S'_n = v_0 \times \frac{q^{\text{nombre de termes}} - 1}{q-1}$.

Les deux formules donnent le même résultat. On passe de l'une à l'autre en multipliant le numérateur et le dénominateur par – 1.

$$\begin{aligned} S'_n &= 5 \times \frac{1-4^{n+1}}{1-4} \\ &= 5 \times \frac{1-4^{n+1}}{-3} \\ &= -\frac{5}{3} \times \left(1 - 4^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= 5 \times \frac{4^{n+1}-1}{4-1} \\ &= 5 \times \frac{4^{n+1}-1}{3} \\ &= 5 \times \frac{1}{3} \times \left(4^{n+1} - 1\right) \\ &= \frac{5}{3} \times \left(4^{n+1} - 1\right) \end{aligned}$$

On passe $S'_n = -\frac{5}{3} \times \left(1 - 4^{n+1}\right)$ à $S'_n = \frac{5}{3} \times \left(4^{n+1} - 1\right)$ (expression plus intéressante ici) en faisant rentrer le – dans la parenthèse.

V.

Cet exercice a été complètement raté.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence $u_{n-1} = -2u_n$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Répondre par une phrase en donnant toutes les précisions utiles.

La relation de récurrence s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = -\frac{1}{2} \times u_{n-1}$.

Cette relation exprime que chaque terme de la suite, sauf le premier, est égal au précédent multiplié par $-\frac{1}{2}$.

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$.

2°) Exprimer u_n en fonction de *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ (une seule égalité)}$$

VI.

Cet exercice a été complètement raté.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - 2 \times 3^n$ pour tout entier naturel *n*.

La suite (u_n) est une suite ni arithmétique ni géométrique.
On ne peut donc pas parler de raison

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = -4 \times 3^n$.

On part évidemment de $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \left(1 - 2 \times 3^{n+1}\right) - \left(1 - 2 \times 3^n\right) \\ &= 1 - 2 \times 3 \times 3^n - 1 + 2 \times 3^n \qquad \text{(on utilise : } 3^{n+1} = 3^n \times 3^1 = 3^n \times 3\text{)} \\ &= -6 \times 3^n + 2 \times 3^n \\ &= 3^n \times (-6 + 2) \qquad \text{(on factorise } 3^n\text{)} \\ &= -4 \times 3^n \end{aligned}$$

2°) En déduire, en justifiant, le sens de variation de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 3^n > 0$ et $-4 < 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$ (la quantification « $\forall n \in \mathbb{N}$ » est très importante pour pouvoir conclure).

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante (à partir de l'indice 0).

VII.

En 2015, une forêt possède 80 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 5 000 arbres.
Déterminer la première année durant laquelle la forêt comptera plus de 90 000 arbres.
Expliquer la démarche mise en œuvre pour répondre à la question.

Il s'agit d'un exercice de prise d'initiative : l'élève doit mettre en œuvre toute une démarche pour résoudre le problème.
L'énoncé ne parle pas de suite ; c'est à l'élève de modéliser la situation par une suite.
C'est à l'élève de « créer » une suite.

Analyse du problème :

Il s'agit d'un problème de modélisation d'une situation concrète (processus d'évolution).

On sort ici du modèle arithmétique ou du modèle géométrique.

Méthode de résolution :

Les étapes sont :
① définition d'une suite
② relation de récurrence de cette suite
③ calcul des termes à l'aide de la calculatrice
④ conclusion

Solution :

① Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le nombre d'arbres dans la forêt durant l'année $(2015+n)$.

On pourrait aussi, si on le voulait, noter u_n le nombre d'arbres en milliers durant l'année $(2015+n)$.

② D'après l'énoncé, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 0,95u_n + 5000$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et son premier terme $u_0 = 80000$.

On ne va pas chercher l'expression de u_n en fonction de *n*.

On notera que, dans ce modèle, u_n peut ne pas être entier.

③ On rentre la suite (u_n) dans la calculatrice à l'aide de la relation de récurrence.

$n\text{Min} = 0$
$\text{u}(n) = 0.95\text{u}(n-1) + 5000$
$\text{u}(n\text{Min}) = 80000$

④ On observe que la suite (u_n) semble strictement croissante.
Nous admettrons qu'il en est bien ainsi.

On cherche le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n > 90000$.

$u_{13} \approx 89733$ (valeur arrondie à l'unité)

$u_{14} \approx 90247$ (valeur arrondie à l'unité)

Le nombre d'arbres dépassera 90 000 pour la première fois en 2029.