1$^{\text{ère}}$ S1

Test du mardi 24 mars 2015 (20 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (6 points : 3 points + 3 points)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 60 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 4 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.
La suite (u_n) est donc définie sur $\mathbb{N}$.

On rappelle que u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$.
Ainsi, le premier terme de la suite est $u_0 = 60$ puisqu'en 2010, la forêt compte 60 000 arbres.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Aucune explication n'est demandée dans cette question.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………….……………….. (une seule égalité)

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente. On n'oubliera pas de rentrer l'indice et la valeur du premier terme.
On admet que la suite (u_n) est strictement croissante.
Déterminer la première année durant laquelle la forêt comptera plus de 65 000 arbres.

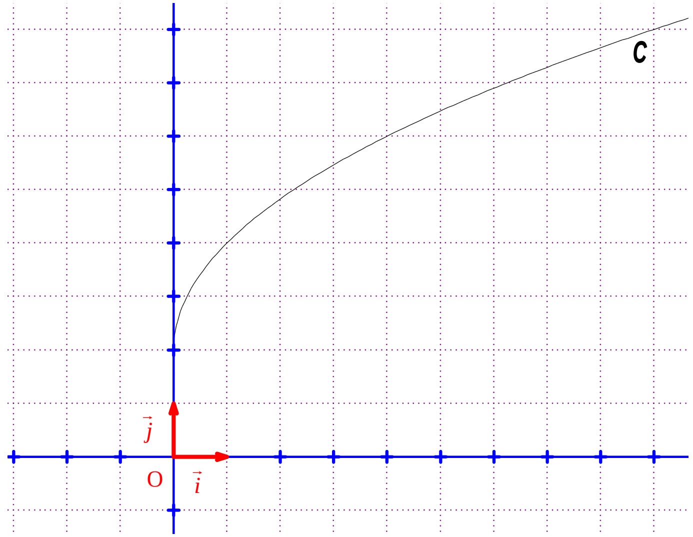
……………………….. (répondre sans faire de phrase)

II. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ pour tout entier naturel n.
Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Effectuer avec soin sur ce graphique la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Laisser les traits de construction apparents. Utiliser des pointillés pour le tracé des « marches d'escalier ».

Ne pas écrire de valeurs sur l'axe des abscisses (sauf éventuellement la valeur de u_0 si on le désire).



III. (10 points : 2 points + 2 points + 3 points + 3 points)

Une urne contient 5 boules blanches et *a* boules noires (*a* est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire successivement avec remise 20 boules de l'urne et examine leurs couleurs.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 €, mais pour chaque boule noire tirée, il perd 3 €.
On note X le nombre de boules blanches tirées et G le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision. On donnera l'un des paramètres en fonction de *a*.

X suit la loi ……………………………………………………………………………………………...

2°) Exprimer G en fonction de X.

G = ………………….................. (un seul résultat sous forme réduite)

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G en fonction de *a* sous forme simplifiée.

$\text{E}(\text{G}) =$ ………………

$\text{V}(\text{G}) =$ ………………

Corrigé du test du 24-3-2015

I. (6 points : 3 points + 3 points)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 60 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 4 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.
La suite (u_n) est donc définie sur $\mathbb{N}$.
On rappelle que u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$.
Ainsi, le premier terme de la suite est $u_0=60$ puisqu'en 2010, la forêt compte 60 000 arbres.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Aucune explication n'est demandée dans cette question.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 0{,}96u_{n-1}+3 \text{ (une seule égalité)}$$

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente. On n'oubliera pas de rentrer l'indice et la valeur du premier terme.
On admet que la suite (u_n) est strictement croissante.
Déterminer la première année durant laquelle la forêt comptera plus de 65 000 arbres.

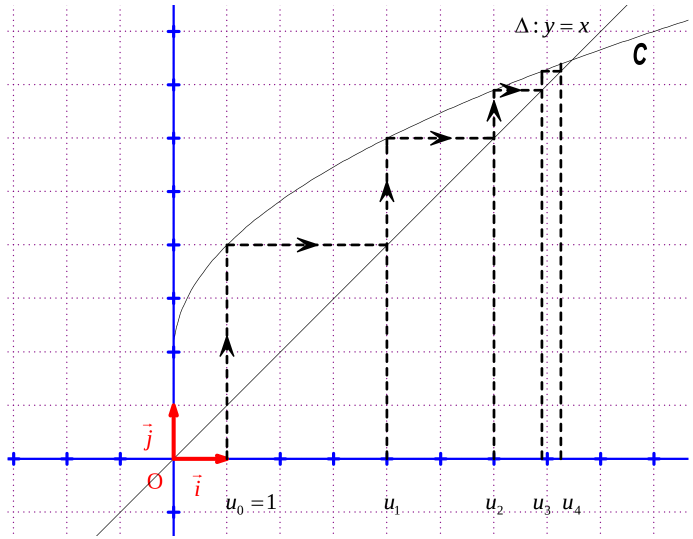
2020 (répondre sans faire de phrase)

II. (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}+2$ pour tout entier naturel n.
Sur le graphique ci-contre, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x}+2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Effectuer avec soin sur ce graphique la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les termes de la suite (u_n) de u_0 à u_4 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

Laisser les traits de construction apparents. Utiliser des pointillés pour le tracé des « marches d'escalier ».

Ne pas écrire de valeurs sur l'axe des abscisses (sauf éventuellement la valeur de u_0 si on le désire).



III. (10 points : 2 points + 2 points + 3 points + 3 points)

Une urne contient 5 boules blanches et a boules noires (a est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire successivement avec remise 20 boules de l'urne et examine leurs couleurs.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 €, mais pour chaque boule noire tirée, il perd 3 €.
On note X le nombre de boules blanches tirées et G le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision. On donnera l'un des paramètres en fonction de a.

X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\dfrac{5}{5+a}$.

2°) Exprimer G en fonction de X.

$$\mathrm{G} = 5\mathrm{X} - 60 \text{ (un seul résultat sous forme réduite)}$$

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G en fonction de a sous forme simplifiée.

• Attention, G ne suit pas la loi binomiale. Seule X suit une loi binomiale.
G est un gain algébrique en euros alors que X compte un nombre de succès.
On ne peut donc pas calculer l'espérance et la variance de G en utilisant les formules du cours sur l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi binomiale.

• On utilise les formules données par une propriété du cours sur les variables aléatoires :
$\mathrm{E}(a\mathrm{X}+b) = a \times \mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$ $\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b) = a^2 \times \mathrm{V}(\mathrm{X})$.

• On utilise les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable qui suit une loi binomiale.

$$\mathrm{E}(\mathrm{G}) = \frac{200-60a}{5+a}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{G}) = \frac{2500a}{(5+a)^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}) &= 5\times\mathrm{E}(\mathrm{X}) - 60 \\
&= 5\times 20\times\frac{5}{5+a} - 60 \\
&= \frac{500}{5+a} - 60 \\
&= \frac{200-60a}{5+a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{G}) &= 5^2\times\mathrm{V}(\mathrm{X}) \\
&= 25\times 20\times\frac{5}{5+a}\times\frac{a}{5+a} \\
&= \frac{2500a}{(5+a)^2}
\end{aligned}$$