# Lois de composition interne

## I. Généralités

**Définition (loi de composition interne) :**

Soit $E$ un ensemble quelconque.

On appelle **loi de composition interne** (LCI) sur $E$ une application de $E \times E$ dans $E$ qui à tout couple $(a, b)$ associe un unique élément noté $a * b$.

On dit $E$ est muni de la LCI $*$.
On note $(E, *)$ et l'on dit que $(E, *)$ est un **monoïde** ou un **magma**.

Les LCI sont souvent notées *, T (« truc »), $\perp$ (« anti-truc »).

**Exemples :**

**1. Ensembles de nombres**

$\mathbb{N}$ muni de la LCI $+$.

$\mathbb{N}$ muni de la LCI $\times$.

On note $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{N}, \times)$.

**2. Ensembles des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels**

$\left(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),+\right)$ (ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels muni de l'addition)

$\left(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\times\right)$ (ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels muni de la multiplication)

**3. Ensemble des parties d'un ensemble**

Soit $E$ un ensemble.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$ c'est-à-dire l'ensemble des sous-ensembles de $E$.
On munit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des lois $\cap$ (intersection) et $\cup$ (réunion).

**4. Ensemble des applications d'un ensemble dans lui-même**

Soit $E$ un ensemble.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $E$ dans $E$.
On munit l'ensemble $\mathcal{F}$ de la loi $\circ$ de composition des applications.

## II. Commutativité

**Définition (loi commutative) :**

On considère un monoïde $(E, *)$.

On dit que la loi de composition $*$ est **commutative** pour exprimer $\forall (a, b) \in E^2 \quad a*b = b*a$.

**Exemples :**

**1.** Les lois $+$ (addition) et $\times$ (multiplication) dans les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

**2.** $\left(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),+\right)$ (ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels muni de l'addition)

**Contre-exemples :**

**1.** $\left(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\times\right)$

La loi $\times$ n'est pas commutative dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

**2. Ensemble des applications d'un ensemble dans lui-même**

Soit $E$ un ensemble.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de $E$ dans $E$.
On munit l'ensemble $\mathcal{F}$ de la loi $\circ$ de composition des applications.
Cette LCI n'est pas commutative.
En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

## III. Associativité

**Définition (loi associative) :**

On dit que la loi $*$ est **associative** pour exprimer que $\forall (a, b, c) \in E^3 \quad a*(b*c) = (a*b)*c$.

***Exemples :***

1. $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R},\times)$

2. $\left(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\times\right)$ (car $\forall (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^3 \quad \mathrm{A}(\mathrm{BC}) = (\mathrm{AB})\mathrm{C}$)

3. $(\mathcal{F}, \circ)$

## IV. Élément neutre

**Définition (élément neutre) :**

On considère un ensemble $E$ muni d'une loi de composition interne $*$.

• On dit qu'un élément $e \in E$ est **élément neutre à droite** pour exprimer que $\forall x \in E\ x * e = x$.

• On dit qu'un élément $e \in E$ est **élément neutre à gauche** pour exprimer que $\forall x \in E\ e * x = x$.

• On dit qu'un élément $e \in E$ est **élément neutre** pour exprimer que c'est un élément neutre à gauche et à droite c'est-à-dire $\forall x \in E \quad x * e = e * x = x$.

**Exemples :**

**1.** $(\mathbb{R},+) \to 0$

**2.** $(\mathbb{R},\times) \to 1$

**3.** $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\times) \to \mathrm{I}_n$

**4.** $(\mathcal{F}, \circ) \to \mathrm{id}_E$

**Propriété :**

On considère un ensemble $E$ muni d'une loi de composition interne $*$.

S'il existe un élément neutre, alors celui-ci est unique.

***Démonstration :***

Supposons que $e$ et $e'$ soient deux éléments neutres de $(E, *)$.

$e * e' = e' = e$ car e neutre à gauche et $e'$ neutre à droite.

Donc $e = e'$.

## V. Élément absorbant

**Définition (élément absorbant) :**

Soit $(E, *)$ un monoïde.
On dit un élément $a$ de $E$ est **absorbant** pour exprimer que $\forall x \in E \quad a * x = x * a = a$.

## VI. Symétrique d'un élément

**Définition (symétrique) :**

Soit $E$ muni d'une LCI $*$ admettant une LCI admettant un élément neutre $e$.

On dit qu'un élément $x$ et E admet un **symétrique à droite** si $\exists x' \in E$ tel que $x * x' = e$.

On dit qu'un élément $x$ et E admet un **symétrique à gauche** si $\exists x' \in E$ tel que $x' * x = e$.

On dit qu'un élément $x$ et E admet un **symétrique** s'il admet un symétrique à gauche et à droite c'est-à-dire si $\exists x' \in E \quad x * x' = x' * x = e$.