$1^{\text{ère}}$ S1

Test du lundi 23 mars 2015 (30 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

Dans les exercices **I** et **II**, une unité de longueur est fixée dans le plan *P*.

I. (4 points : 1 point + 1 point + 1 point + 1 point)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=7$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=13$.

Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois, calculs au brouillon) :

$(2\vec{u})\cdot\vec{v}=$…………. $\qquad (\vec{u}+2\vec{v})\cdot\vec{v}=$………….

$(2\vec{u})\cdot(2\vec{v})=$…………. $\qquad (\vec{u}-\vec{v})^2=$………….

II. (6 points : 2 points + 4 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $(a\in\mathbb{R}_+^*)$ du plan *P*.

1°) Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Calculer AG^2 en fonction de a. En déduire AG en fonction de a.

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$.

Le modèle de rédaction est donné ci-dessous.

On commencera par définir un point permettant de trouver *E* (nom au choix) puis on complétera chacune des lignes de la chaîne d'équivalences par un produit scalaire. On formulera enfin une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

………

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$$M\in E \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$$

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………

L'ensemble *E* est ……………………………………………………………………………………

III. (6 points : 2 points + 2 points + 2 points)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2010+n)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

La suite (u_n) est donc définie sur $\mathbb{N}$ et $u_0=50$.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1 quelconque.

Aucune explication n'est demandée dans cette question.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ ………………………………………… (une seule égalité)

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente.

Donner la valeur arrondie au millième de u_{15} puis interpréter concrètement le résultat obtenu par rapport à la situation étudiée (sans parler de la suite (u_n)).

$u_{15}\approx$………………. (valeur arrondie au millième)

………

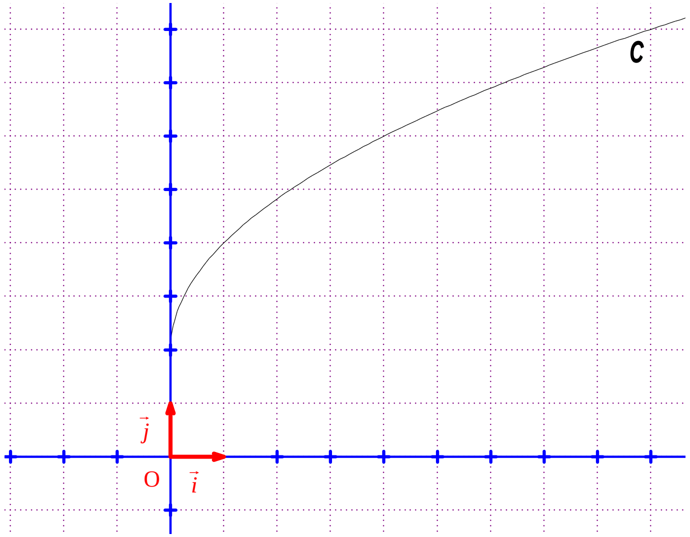
IV. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ pour tout entier naturel n.

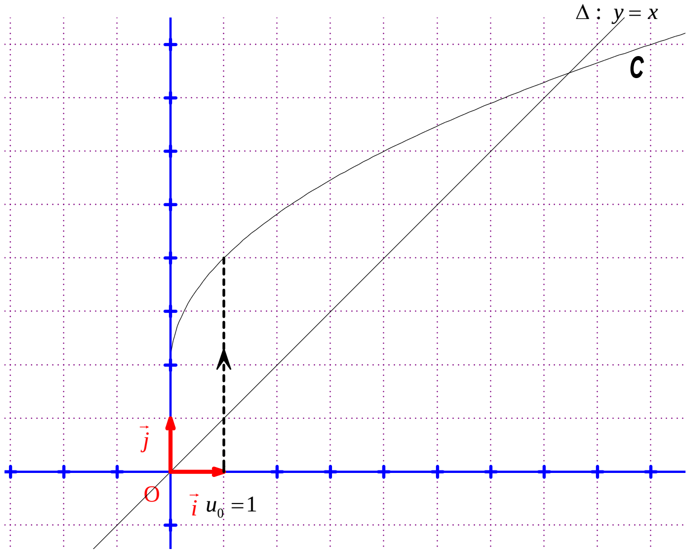
1°) Sur les graphiques suivants, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + 2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Les graphiques 2, 3 et 4 montrent les premières étapes de la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

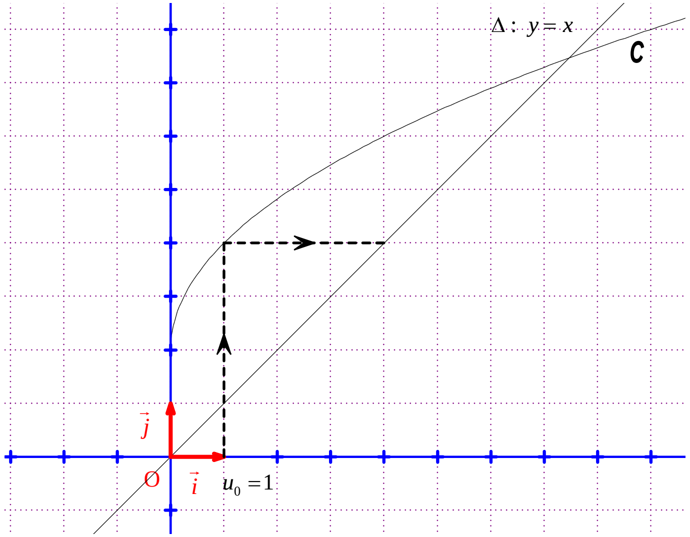
Poursuivre avec soin sur le graphique 4 la construction jusqu'à u_4. Laisser les traits de construction apparents.



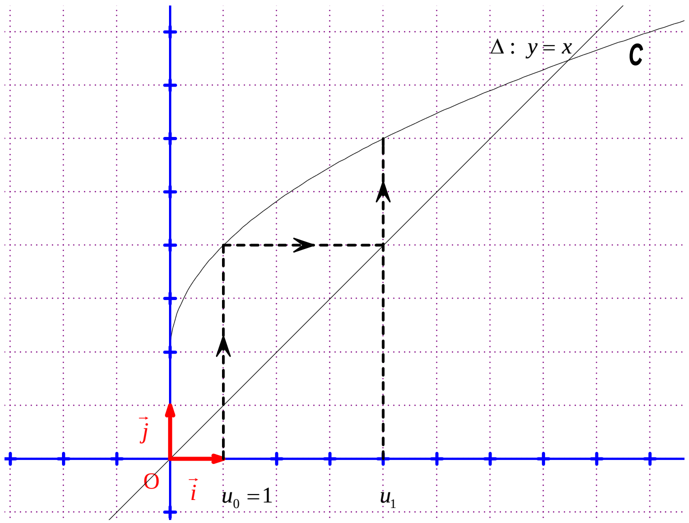
Graphique 1 (ne rien écrire sur ce graphique)



Graphique 2 (ne rien écrire sur ce graphique)



Graphique 3 (ne rien écrire sur ce graphique)



Graphique 4

2°) À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

Conseil de rédaction (ne rien écrire dans ce cadre)

On pourra formuler la conjecture de l'une des deux manières suivantes :
- « D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) est … . »
- « Grâce au graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … . ».

……

Corrigé du contrôle du 23-3-2015

I.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=7$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=13$.
Compléter les égalités suivantes (un seul résultat à chaque fois, calculs au brouillon) :

$\left(2\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=26$ $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)\cdot\vec{v}=111$

$\left(2\vec{u}\right)\cdot\left(2\vec{v}\right)=52$ $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=32$

II.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$ du plan *P*.

1°) Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Calculer AG^2 en fonction de *a*. En déduire AG en fonction de *a*.

$$\begin{aligned}AG^2&=\overrightarrow{AG}^2\\&=\left(3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2\\&=9AB^2-6\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+AC^2\\&=9a^2-6\times a\times a\times\cos 60°+a^2\\&=9a^2-6\times a^2\times\frac{1}{2}+a^2\\&=7a^2\end{aligned}$$

Donc $AG=a\sqrt{7}$ (car $a>0$)

2°) Déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$.
Le modèle de rédaction est donné ci-dessous.
On commencera par définir un point permettant de trouver *E* (nom au choix) puis on complétera chacune des lignes de la chaîne d'équivalences par un produit scalaire. On formulera enfin une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

Soit I le milieu de [BC].

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$$\begin{aligned}M\in E&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0\\&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{MI}\right)=0\\&\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MI}\right)=0\\&\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MI}=0\end{aligned}$$

On se ramène à un seul produit scalaire, sans nombre, sans parenthèses.

L'ensemble *E* est la droite passant par I et perpendiculaire à (AB).

III.

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite $\left(u_n\right)$ où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $\left(2010+n\right)$. En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.
La suite $\left(u_n\right)$ est donc définie sur $\mathbb{N}$ et $u_0=50$.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} où *n* est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1 quelconque.
Aucune explication n'est demandée dans cette question.

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=0{,}95u_{n-1}+3\ \text{(une seule égalité)}$$

Il ne fallait pas oublier le fait que u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $\left(2010+n\right)$.

2°) « Rentrer » la suite $\left(u_n\right)$ dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente.
Donner la valeur arrondie au millième de u_{15} puis interpréter concrètement le résultat obtenu par rapport à la situation étudiée (sans parler de la suite $\left(u_n\right)$).

$$u_{15}\approx 55{,}367\ \text{(valeur arrondie au millième)}$$

Il y aura environ 55 367 arbres en 2025.

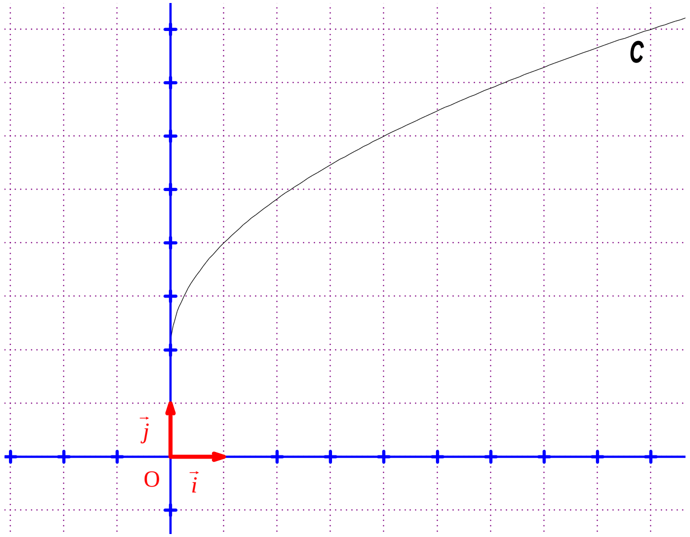
IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=2\sqrt{u_n}+2$ pour tout entier naturel n.

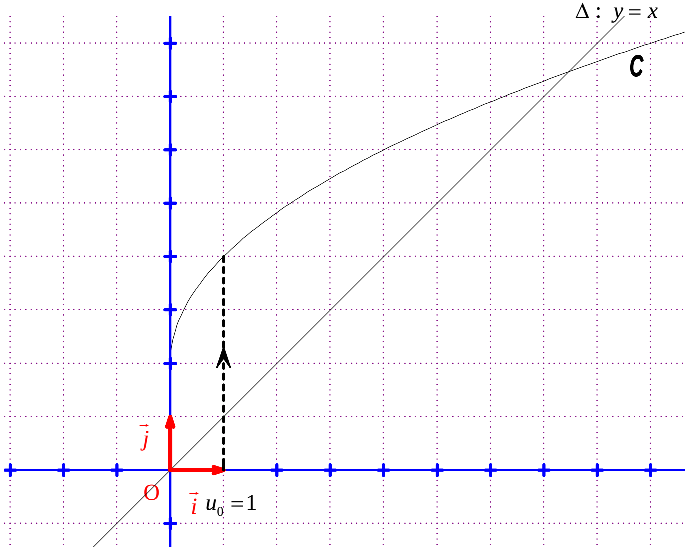
1°) Sur les graphiques ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x}+2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Les graphiques 2, 3 et 4 montrent les premières étapes de la construction en « marches d'escalier » permettant de faire apparaître les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).

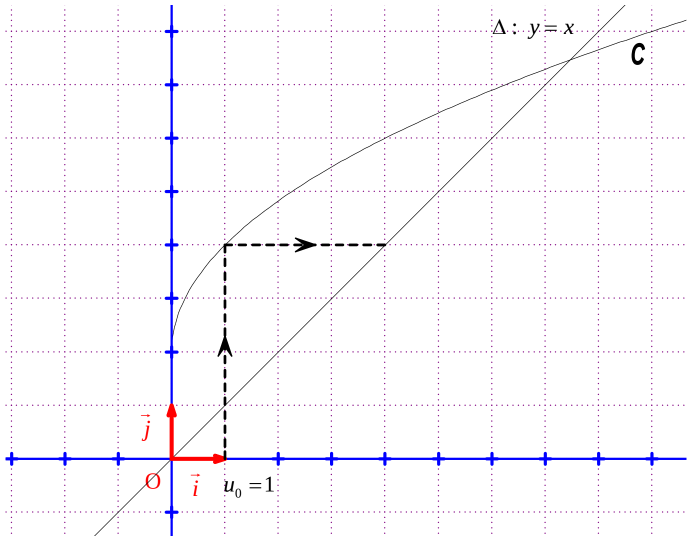
Poursuivre avec soin sur le graphique 4 la construction jusqu'à u_4. Laisser les traits de construction apparents.



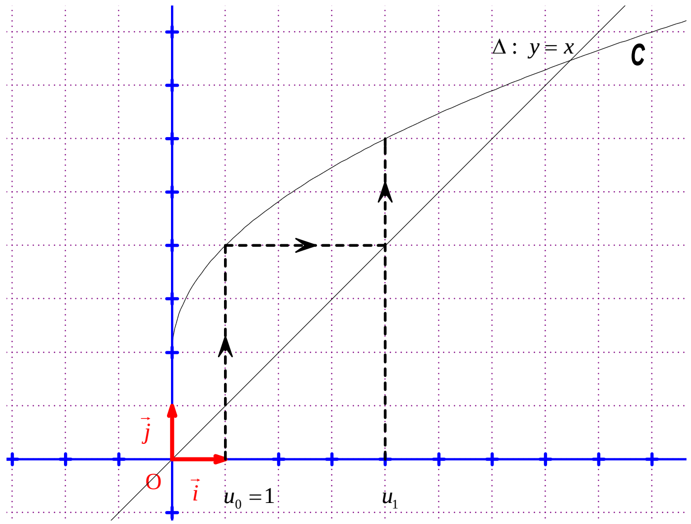
Graphique 1 (ne rien écrire sur ce graphique)



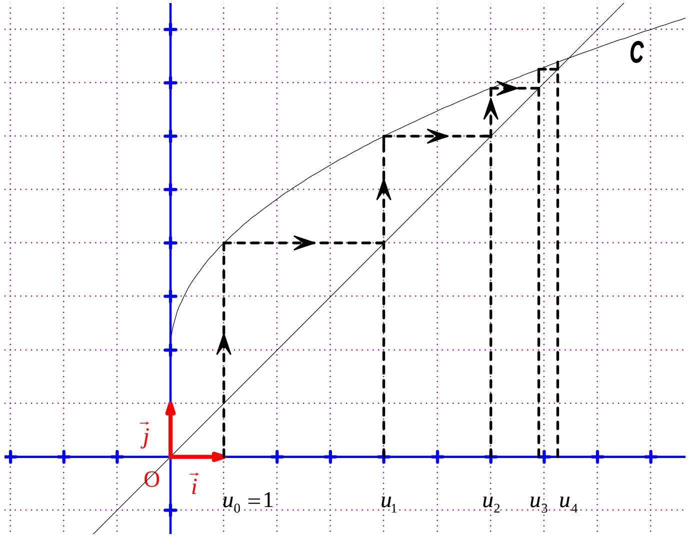
Graphique 2 (ne rien écrire sur ce graphique)



Graphique 3 (ne rien écrire sur ce graphique)



Graphique 4



Cet exercice a été très bien réussi. Tous les élèves ont compris comment effectuer la construction grâce au modèle.

On peut lire les valeurs exactes de u_1 et u_2. Mais très vite, à partir de u_3, on ne peut plus lire que des valeurs approchées avec la précision permise sur le graphique.

C'est pourquoi n'écrit pas de valeurs sur l'axe des abscisses, à part, éventuellement, comme nous l'avons fait sur le graphique, la valeur de u_0.

Certains élèves ont fait des calculs. Il ne faut absolument pas faire de calculs pour effectuer la construction. On peut trouver que ce n'est pas très précis, comme m'a dit un élève (Tristan Martin, le 24-3-2015). J'ai répondu que c'est suffisant pour déduire déjà des renseignements sur la suite (cf. question suivante sur la monotonie de la suite (u_n)) et que l'on ne fait pas surtout pas de calculs.

On peut vérifier cette construction sur la calculatrice.

2°) À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

Conseil de rédaction (ne rien écrire dans ce cadre)

On pourra formuler la conjecture de l'une des deux manières suivantes :
- « D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) est … . »
- « Grâce au graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est … . ».

D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) est strictement croissante.