$1^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 18 mars 2015 (30 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (8 points : 2 points + 3 points + 3 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$ du plan *P*.

1°) Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Calculer AG^2 en fonction de a.

………

………

………

………

2°) On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$.

On considère les ensembles E_1 et E_2 ainsi définis :

$E_1 = \left\{M \in P \;/\; \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0\right\}$; $E_2 = \left\{M \in P \;/\; \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0\right\}$.

Compléter chacun des cadres suivants en complétant les lignes par des produits scalaires.
Formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$M \in E_1 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

L'ensemble E_1 est ……………………………………………………………………………

Soit M un point quelconque du plan *P*.

$M \in E_2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………

L'ensemble E_2 est ……………………………………………………………………………

II. (5 points : 2 points + 1 point + 1 point + 1 point + 1 point bonus)

Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire successivement avec remise 10 boules de l'urne et examine leurs couleurs.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5 €, mais pour chaque boule noire tirée, il perd 10 €.
On note X le nombre de boules blanches tirées et G le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision. On donnera l'un des paramètres en fonction de n.

X suit la loi ……………………………………………………………………………………………

2°) Exprimer G en fonction de X.

G = ……………………………… (un seul résultat sous forme réduite)

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G en fonction de n sous forme simplifiée.

$E(G) =$ ……………… $V(G) =$ ………………

4°) Que peut-on penser de l'espérance de G lorsque n devient de plus en plus grand ?

………

………

………

III. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

Une enquête réalisée sur les lecteurs d'une bibliothèque révèle que :
- chaque année, 98 % des lecteurs inscrits l'année précédente reprennent un abonnement ;
- chaque année, on compte 200 nouveaux abonnés.

Cette année, la bibliothèque compte 5000 abonnés.
Pour tout entier naturel *n*, on note u_n le nombre d'abonnés à la bibliothèque au bout de *n* années.
La suite (u_n) est donc définie sur $\mathbb{N}$ et $u_0 = 5000$.
On notera que, dans ce modèle mathématique, u_n peut ne pas être un nombre entier.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} où *n* est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Aucune explication n'est demandée dans cette question.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ………………………….………………… (une seule égalité)

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente.
Donner la valeur arrondie à l'unité de u_{12} puis interpréter concrètement le résultat obtenu par rapport à la situation étudiée (sans parler de la suite (u_n)).

$u_{12} \approx$ .... (valeur arrondie à l'unité)

…………………………………………………..…………………………………………………………………

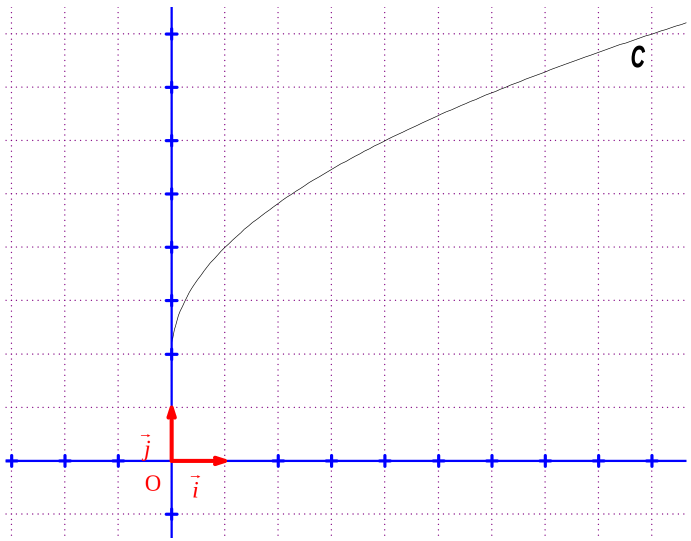
IV. (3 points : 1 point + 1 point + 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2-u_n}{3}$ pour tout entier naturel *n*.
Calculer u_1, u_2, u_3.

……………………………………...	……………………………………...	……………………………………...
……………………………………...	……………………………………...	……………………………………...
……………………………………...	……………………………………...	……………………………………...
……………………………………...	……………………………………...	……………………………………...

V. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ pour tout entier naturel *n*.
On donne sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = 2\sqrt{x} + 2$ dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Faire apparaître la construction classique des termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).
Laisser les traits de construction apparents.



Corrigé du contrôle du 18-3-2015

I.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$ du plan P.

1°) Soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Calculer AG^2 en fonction de a.

$$\begin{aligned}
AG^2 &= \overrightarrow{AG}^2 \\
&= \left(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 \\
&= 4\overrightarrow{AB}^2 - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= 4a^2 - 4a \times a \times \cos 60° + a^2 \\
&= 4a^2 - 4a \times a \times \frac{1}{2} + a^2 \\
&= 3a^2
\end{aligned}$$

2°) On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[AC]$.
On considère les ensembles E_1 et E_2 ainsi définis :

$E_1 = \left\{M \in P \,/\, \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0\right\}$; $E_2 = \left\{M \in P \,/\, \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0\right\}$.

Compléter chacun des cadres suivants en complétant les lignes par des produits scalaires.
Formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

Soit M un point quelconque du plan P.

$$\begin{aligned}
M \in E_1 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(2\overrightarrow{MI}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{MJ}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble E_1 est le cercle de diamètre [IJ].

Soit M un point quelconque du plan P.

$$\begin{aligned}
M \in E_2 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \left(2\overrightarrow{MJ}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MJ}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble E_2 est la droite passant par J et perpendiculaire à (AB).

Quelques erreurs de méthodes :

① Surtout, on ne développe pas !

② On se garde également d'appliquer une « règle du produit scalaire nul » calquée sur celle des réels, mais qui est fausse, du type :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{0}.$$

① On se ramène à un produit scalaire de deux vecteurs sans nombre, sans parenthèses.

② On se ramène à un produit scalaire nul.

③ On interprète ce dernier produit scalaire en orthogonalité à l'aide de la propriété (fondamentale) suivante :

« $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ».

Autrement dit, on traduit le produit scalaire nul en orthogonalité.

II.

Une urne contient 8 boules blanches et n boules noires (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Un joueur tire successivement avec remise 10 boules de l'urne et examine leurs couleurs.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 5 €, mais pour chaque noire tirée, il perd 10 €.
On note X le nombre de boules blanches tirées et G le gain algébrique du joueur en euros.

1°) Compléter la phrase suivante avec le maximum de précision. On donnera l'un des paramètres en fonction de n.

X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{8}{n+8}$.

L'urne contient 8 boules blanches et n boules noires donc elle contient $n+8$ boules au total.
La lettre n n'était peut-être pas la mieux choisie ici car elle ne désignait pas le nombre de répétitions de l'épreuve de Bernoulli comme c'est le cas d'ordinaire. Du coup, on ne donnait pas de noms aux paramètres.

2°) Exprimer G en fonction de X.

$$\mathrm{G}=15\mathrm{X}-100 \text{ (un seul résultat sous forme réduite)}$$

3°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de G en fonction de n sous forme simplifiée.

$$\mathrm{E}(\mathrm{G})=\frac{400-100n}{8+n} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{G})=\frac{18000n}{(8+n)^2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{G})&=15\times\mathrm{E}(\mathrm{X})-100\\&=15\times10\times\frac{8}{8+n}-100\\&=\frac{1200}{8+n}-100\\&=\frac{1200-100(8+n)}{8+n}\\&=\frac{400-100n}{8+n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{G})&=15^2\times\mathrm{V}(\mathrm{X})\\&=15^2\times10\times\frac{8}{8+n}\times\frac{n}{8+n}\\&=\frac{18000n}{(8+n)^2}\end{aligned}$$

4°) Que peut-on penser de l'espérance de G lorsque n devient de plus en plus grand ?

On a vu que $\mathrm{E}(\mathrm{G})=\frac{1200}{8+n}-100$.

Lorsque n devient de plus en plus grand, $\frac{1200}{8+n}$ se rapproche de plus en plus de 0.

Donc $\mathrm{E}(\mathrm{G})$ tend vers – 100.

On peut également dire que $\mathrm{E}(\mathrm{G})$ décroît lorsque n croît. En effet, la fonction $f : x \mapsto \frac{1200}{8+x}-100$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ comme le montre, par exemple, un simple calcul de dérivée.

III.

Une enquête réalisée sur les lecteurs d'une bibliothèque révèle que :
- chaque année, 98 % des lecteurs inscrits l'année précédente reprennent un abonnement ;
- chaque année, on compte 200 nouveaux abonnés.

Cette année, la bibliothèque compte 5000 abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à la bibliothèque au bout de n années.

La suite (u_n) est donc définie sur $\mathbb{N}$ et $u_0=5000$.

On notera que, dans ce modèle mathématique, u_n peut ne pas être un nombre entier.

1°) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} où n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Aucune explication n'est demandée dans cette question.

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n=0{,}98u_{n-1}+200 \text{ (une seule égalité)}$$

- Plutôt que d'écrire $\frac{98}{100}$, on écrit 0,98.
- On ne met pas de parenthèses autour de u_{n-1}.

Cette question n'a pas été réussie du fait de sa formulation « u_n en fonction de u_{n-1} ».
Il fallait écrire une égalité avec u_n dans le membre de gauche et u_{n-1} dans le membre de droite, ce qui n'a pas semblé évident à de nombreux élèves à qui j'ai dû le rappeler pendant le contrôle.
Ensuite, se posait le problème de traduire l'énoncé et là encore cela a été une difficulté pour un certain nombre d'élèves.

$$u_n \quad = \quad 0{,}98u_{n-1} + 200$$

$\downarrow$ nombre de lecteurs au bout de n années — $\downarrow$ nombre de lecteurs au bout de $(n-1)$ années

Attention, pour 98 %, il ne s'agit pas d'un pourcentage d'augmentation mais d'un pourcentage exprimant une proportion (une part).

La suite (u_n) n'est ni une suite arithmétique ni une suite géométrique comme on peut le voir aisément grâce à la relation de récurrence que l'on a établi ou grâce au calcul des trois premiers termes.

On ne peut pas trouver l'expression explicite du terme général en fonction de *n*.

Au départ, la suite (u_n) est définie par compréhension (j'entends pas là qu'on dit « u_n est le nombre d'abonnés au bout de *n* années »).
On la définit ensuite par récurrence ce qui permet le calcul des premiers termes de proche en proche.

On ne cherche pas une expression explicite du terme général.

2°) « Rentrer » la suite (u_n) dans la calculatrice en utilisant la relation de récurrence établie à la question précédente.

La relation $u_n = 0{,}98u_{n-1} + 200$ (avec notation indicielle) peut aussi s'écrire sous la forme $u(n) = 0{,}98u(n-1) + 200$ (avec notation fonctionnelle).
C'est cette dernière écriture qui est utilisée par la calculatrice.

Donner la valeur arrondie à l'unité de u_{12} puis interpréter concrètement le résultat obtenu par rapport à la situation étudiée (sans parler de la suite (u_n)).

$$u_{12} \approx 6076 \text{ (valeur arrondie à l'unité)}$$

Au bout de 12 ans, la bibliothèque comptera environ 6076 abonnés.

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2-u_n}{3}$ pour tout entier naturel *n*.
Calculer u_1, u_2, u_3.

$$u_1 = \frac{2-u_0}{3} = \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

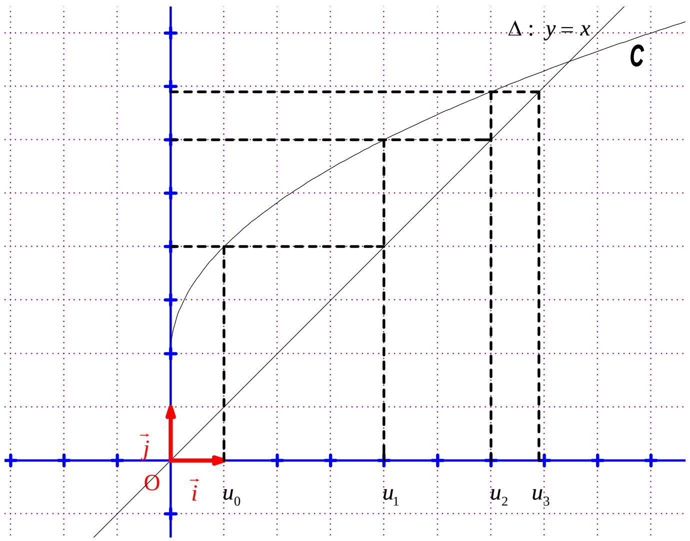
$$u_2 = \frac{2-u_1}{3} = \frac{2-2}{3} = 0$$

$$u_3 = \frac{2-u_2}{3} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$$

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 2$ pour tout entier naturel *n*.
On donne sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = 2\sqrt{x} + 2$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Faire apparaître la construction classique des termes u_0, u_1, u_2, u_3 sur l'axe des abscisses (sans effectuer de calculs).
Laisser les traits de construction apparents.

Il s'agit de la construction itérative classique des termes d'une suite récurrente (construction en « toile d'araignée » ou en « marches d'escalier »).
On trace la droite Δ d'équation $y = x$.



On peut vérifier la construction à l'aide de la calculatrice.